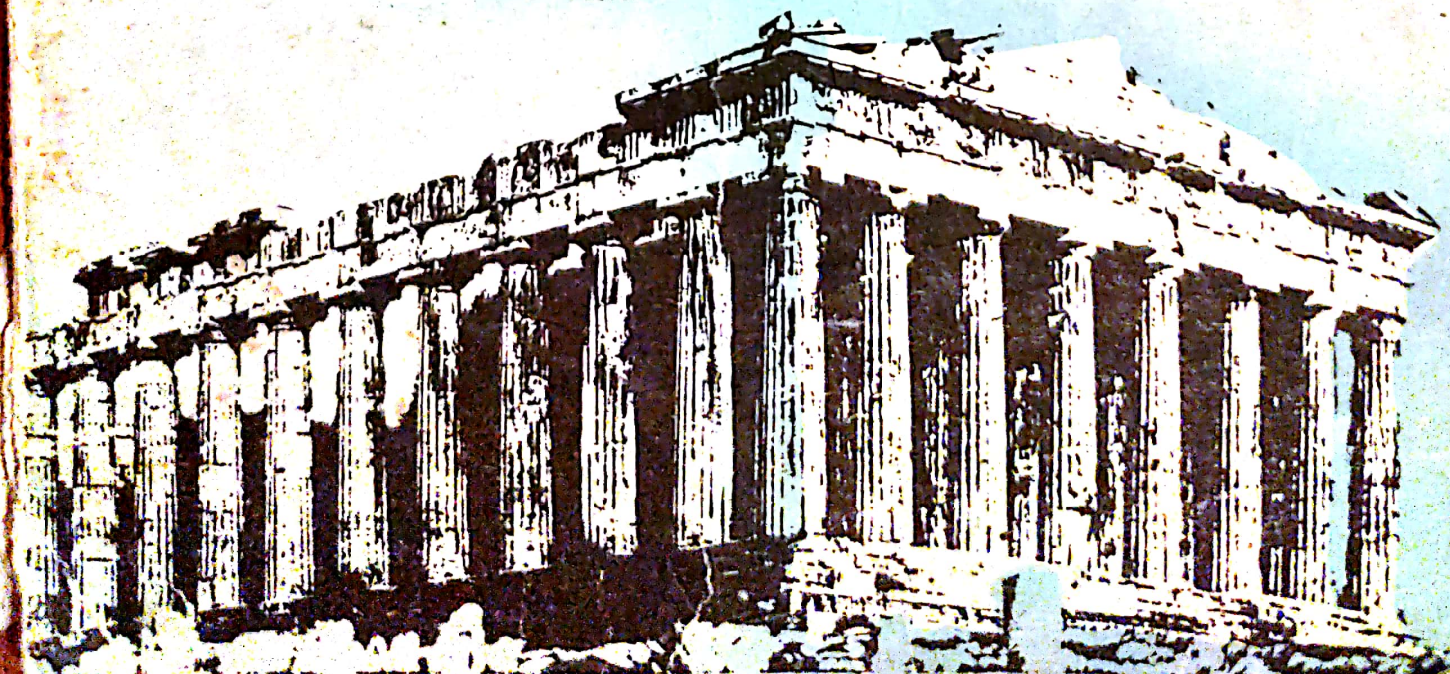
PITAGORA

Mihu Cerchez



MIHU CERCHEZ

PITAGORA

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
București, 1986

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

La încercările noastre de a ne face o idee concretă, o reprezentare personală despre acest gigant al înțelepciunii, care n-a încetat un moment în cei 2.500 ani ce ne despart de existența sa, să fie unul dintre călăuzele recunoscute ale gîndirii europene, istoricii prudenți ai științei grecești ne răspund cu sfatul de a nu ne lăsa amăgiți de prea multă precizie [17]. *Trebuie să ne mulțumim, spun ei, a urmări în evoluțiile sale, roiul sau, mai bine, norul de adepți al căror eventual nucleu rămîne, în mod misterios, ascuns sforțărilor noastre de a-i izola prezența.*

Nici un matematician, atît cît această rasă științifică va continua să existe, nu poate renunța la silința de a înțelege cum s-a realizat pentru întîia oară într-un mod precis și categoric înlănțuirea logică, ce s-a chemat de atunci demonstrație. Viața lui a fost o sforțare continuă de a se perfecționa pe sine însuși, completată cu grija permanentă de perfecționare a celorlalți.

Pitagora își refuza atributul de înțelept (shopos) pe care contemporanii i-l dădeau cu deplină convingere; el se considera numai prieten al înțelepciunii (phylosophos). J. Burnet [14] *afirmă că Heraclit socotea că Pitagora împinsese cercetarea științifică în toate direcțiile mult mai departe decît toți. Cunoașterea la Pitagora, era cum spunea Empedocles, peste știință, adică peste cunoașterea empirică.*

Starea de înțelepciune pe care o poseda, i-a dat forța să scoată din cît cunoștea, cele mai fericite rezultate. Cunoștințele despre matematică înainte de Pitagora se refereau la figuri geometrice și la numere. Știința figurilor constituiau geometria; numerele erau „cardinalele", rezultat al unei numărători și „ordinalele", corespunzînd unei ordini, erau deci numere întregi. Figurile geometrice sînt în general măsurabile, deci reprezentabile prin numere întregi. Numerele întregi reprezintă proprietăți foarte sugestive de invarianță a unor figuri și a unui număr de fenomene fizice. Pînă cînd, intervenind rațiunea cu puterea sa implacabilă, invarianța numărului întreg a fost recunoscută neputincioasă să reprezinte tot realul și a trebuit să-și cedeze poziția sa predominantă, rațiunii.

A fost soarta curioasă a lui Pitagora, să realizeze el această înlocuire.

După ce a încercat, în urma demonstrației teoremei ce-i poartă numele să o exprime printr-o relație între numere, a descoperit imposibilitatea ca aceste numere să fie întotdeauna întregi. El a demonstrat în particular iraționalitatea care era în gîndirea epocii sale, aproape o nonexistență a unui număr care să reprezinte ipotenuza unui triunghi isoscel, măsurată cu latura luată ca unitate de măsură. Pitagora însuși a scos din această constatare, concluzia iraționalității lungimilor în general.

Scanned with OKEN Scanner

Vechiul mit, acel al întregilor, se prăbușea, făcînd loc unei noi atitudini a gîndirii pusă în fața experienței pentru a-i descoperi înțelesurile: raționamentul *și* demonstrația *care au înlocuit de atunci și se mențin și azi ca piloane ale științei.*

Autorul lucrării de față a reușit să prezinte cu claritate această criză de trecere de la o atitudine la alta, prin gîndirea pitagoreică ce a fost și rămîne un moment de hotar în istoria umană.

În 1976, cînd am sărbătorit la Atena și în insula Samos, unde s-a născut și și-a petrecut copilăria excepționala personalitate, care a fost Pitagora, am evocat, împreună cu alți matematicieni greci și străini, în atmosfera creată de dinamismul inegalabil al lui Paul Zervos, președintele Societății de matematică a Greciei, alături de creația pitagoreică, știința și filozofia greacă ce au derivat din ea și au constituit fundamentul întregii civilizații europene care formează azi una din generațiile existenței noastre viitoare.

Am plănuit atunci, și este de dorit să se facă, în amintirea celor 2.500 de ani ce ne despart de viața lui Pitagora, o călătorie la Samos, la Crotona și la Metapont, pe urmele drumului urmat de Pitagora în tinerețea sa, prilej pentru matematicieni, istorici și filozofi, să reconstituie elementele fundamentale ale științei noastre, în forma lor primitivă. Am avea astfel o sinteză demult așteptată a acestor elemente, pe care istoria le acoperă cu detalii și incidente, ce ascund valori nepieritoare ale acestui tezaur de gîndire.

Acad. OCTAV ONICESCU

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

	Prefață	5
	Introducere	9
I.	Aspecte din viața și opera lui Pitagora	11
II.	Demonstrații ale teoremei lui Pitagora	34
III.	Reciproca teoremei lui Pitagora	50
IV.	Generalizări și particularizări ale teoremei lui Pitagora	52
V.	Numere pitagoreice	64
VI.	Construirea numerelor iraționale de forma $\sqrt{a}$, $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$,..., $\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}$, $a, a_1,\ldots, a_n \in N$	67
VII.	Aplicații ale teoremei lui Pitagora	70
	a. Lunulele lui Hipocrat din Chios	70
	b. Aplicații teoretice	74
	c. Aplicații practice	91
	Încheiere	103
	Bibliografie	111

Scanned with OKEN Scanner

CERCHEZ MIHU, **Pitagora** (Pythagoras),
Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1986, 112 p.

Contents

	Preface	5
	Introduction	9
I.	Aspects from Pythagoras' life and work	11
II.	Proofs of Pythagorean theorem	34
III.	Reciprocal of Pythagorean theorem	50
IV.	General and particular aspects of Pythagorean theorem	52
V.	Pythagorean numbers	64
VI.	Building of irational numbers of the form $\sqrt{a},\ \sqrt{a_1^2+a_2^2},\ldots,\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2},\ a,\ a_1,\ldots,a_n\in N$	67
VII.	Applications of Pythagorean theorem	70
	a. The lunes of Hippocrates of Chios	70
	b. Theoretical applications	74
	c. Practical applications	91
	Conclusions	103
	Bibliography	111

ЧЕРКЕЗ МИХУ, **Пифагор**,
Издательство Академии СРР, Бухарест, 1986, 112 стр.

Содержание

	Предисловие	5
	Введение	9
I.	Аспекты жизни и деятельности Пифагора	11
II.	Доказательства теоремы Пифагора	34
III.	Взаимная теорема Пифагора	50
IV.	Общие и частные аспекты теоремы Пифагора	52
V.	Пифагорические числа	64
VI.	Построение иррациональных чисел в форме $\sqrt{a},\ \sqrt{a_1^2+a_2^2},\ldots,\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2},\ a,\ a_1,\ldots,\ a_n\in N$	67
VII.	Применения теоремы Пифагора	70
	а. Луночки Гиппократа Киосского	70
	б. Теоретические применения	74
	в. Практические применения	91
	Заключение	103
	Литература	111

Scanned with OKEN Scanner

Introducere

Pitagora a fost unul dintre primii deschizători de drumuri în matematica elină. El a realizat legătura dintre mărimi şi numere, arătînd cum relaţiile între mărimile unei figuri geometrice se exprimă prin relaţii între numere. Legătura dintre aritmetică şi geometrie, iniţiată de Pitagora şi cultivată în continuare de cîteva generaţii în şcoala ce-i poartă numele, cu multă pasiune şi pricepere, a fost încheiată cu succes de Euclid şi consemnată pentru totdeauna în celebrele sale *Elemente*. Pasul gigantic realizat de Pitagora şi şcoala sa în geometrie poate fi comparat cu cel făcut de René Descartes cu 2000 de ani mai tîrziu. Ceea ce a fost Pitagora pentru ştiinţa elină, a fost Descartes pentru ştiinţa epocii sale.

Am dat numai două exemple, fiecare din ele constituind cîte un pas spre perfecţiune. Exemplele sînt numeroase, şi ele vor continua să apară la diferite intervale de timp.

Matematica elină dezvoltată în şcoala pitagoreică a folosit totuşi şi unele cunoştinţe acumulate de predecesorii ei, iar gîndirea matematică din epoca lui Descartes este rezultatul moştenirii matematicii eline. La rîndul ei, matematica actuală se sprijină pe rezultatele obţinute de Descartes, Newton, Gauss,... Nu vom putea pătrunde adevărurile matematice contemporane în cele mai mici detalii, dacă nu vom cunoaşte în mod temeinic rezultatele moştenirii antice. Acestea, care au lăsat uneori urme neobservate la prima vedere, au avut de spus nu o singură dată un cuvînt hotărîtor în unele cercetări actuale. Putem afirma deci, fără a exagera, că gîndirea matematică de astăzi se sprijină puternic pe pilonii ancoraţi în gîndirea emanată de geniul matematic al antichităţii, acum 2 500 de ani.

•

În lucrarea prezentată am arătat cîteva rezultate care prin tradiţie aparţin lui Pitagora şi mai ales şcolii pitagoreice, pe al cărei frontispiciu era scrisă deviza: „**NUMERELE GUVERNEAZĂ LUMEA**“,[26], [32]. Dar acest edificiu pitagoreic bazat pe numere (care stau la baza tuturor lucrurilor), a început după scurt timp să se clatine şi apoi să se prăbuşească, atunci cînd s-a constatat că există mărimi geometrice ce nu pot fi exprimate cu ajutorul numerelor (naturale sau raţionale). Este interesant de observat că aceste mărimi au fost găsite chiar cu ajutorul teoremei care i se atribuie lui Pitagora. Este vorba de diagonala pătratului şi a pentagonului regulat, care sînt incomensurabile cu laturile lor. Deşi s-au făcut multe încercări, s-a constatat că aceste mărimi nu pot fi exprimate ca raport a două numere

Scanned with OKEN Scanner

întregi. Ele poartă astăzi denumirea de **Numere iraționale.** De asemenea, este remarcabil faptul că în școala lui Pitagora s-a folosit pentru prima oară în mod explicit conceptul de infinit, pentru a demonstra iraționalitatea numerelor $\sqrt{2}$ și $\sqrt{5}$.

Chiar dacă ar fi să atribuim pitagoreicilor numai conceptul de unghi, descoperirea numerelor iraționale, studiul proporțiilor, demonstrația teoremelor enumerate și utilizarea conceptului de infinit, este suficient pentru a ne da seama de saltul calitativ important făcut de matematica greacă.

●

Cu privire la cele 2 000 de demonstrații date teoremei lui Pitagora, 8 aparțin unor profesori români [12], ele nu mai prezintă astăzi vreo importanță deosebită (doar ca o simplă curiozitate). De aceea, în lucrare au fost expuse numai 24, dar dintre cele mai reprezentative (atribuite lui Pitagora, Euclid, Bhaskara, Leonardo Pisano, Leonardo da Vinci,...).

Mai fructuoase s-au dovedit a fi generalizările și particularizările acestei teoreme, începînd cu generalizarea dată de Euclid în **Elemente** (cartea VI — teorema 31) și terminînd cu extinderea ei la un spațiu euclidian n-dimensional.

Au fost expuse de asemenea formulele care permit determinarea **Numerelor Pitagoreice**, elaborate în școala lui Pitagora și a lui Platon, precum și metode pentru construcția cu rigla și compasul a numerelor iraționale de forma $\sqrt{a}, \sqrt{a_1^2+a_2^2}, \ldots, \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$; $a,\ a_1,\ a_2,\ldots,a_n \in \mathbf{N}$.

În ultima parte a lucrării am dat cîteva aplicații ale teoremei lui Pitagora începînd cu **Lunulele lui Hipocrat**, cîteva aplicații teoretice folosite de Euclid în cartea a II-a din **Elemente** (teoremele 9, 10, 11) o nomogramă care permite să găsim ipotenuza (cînd se cunosc catetele), sau una din catete (cînd se dă ipotenuza și cealaltă catetă), precum și cîteva aplicații practice legate mai ales de determinarea poziției unor obiective în unele probleme de amplasament optimal.

Aduc mulțumiri colegului conf. univ. Teodor Gheorghian pentru sugestiile primite, execuția figurilor și a fotografiilor.

Autorul

Scanned with OKEN Scanner

I. *Aspecte din viața și opera lui Pitagora*

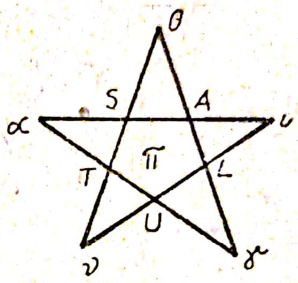
De la Pitagora nu s-a păstrat nimic scris. Pe baza unor tradiții se presupune că s-a născut în insula Samos cu circa 580 ani î.e.n. A învățat cu Tales din Milet, apoi fugind de tirania lui Polycrate s-a stabilit la Crotona în sudul Italiei, unde înființează o școală filozofico-religioasă: „Școala pitagoreică", [40], [45]. S-a căsătorit și a avut 3 urmași, doi băieți, Arimneste și Telauges și o fată, Damo. Telauges ajunsese mai tîrziu dascălul lui Empedocle. După versiunea lui Dicearc citat de Porfir, maestrul ar fi murit (circa 500 î.e.n.)

în Metapont și locuitorii acestui oraș i-au arătat lui Cicero casa, jilțul și mormîntul acestuia. În fresca semnată de Rafael, Pitagora poate fi văzut alături de soția sa, frumoasa Teano, înconjurat de discipolii săi.

Scanned with OKEN Scanner

Pitagoreicii aveau ca semn de unire, **Pentagonul stelat sau Pentagrama.** Acest semn avea pentru ei o semnificație mistică. Literele scrise în vîrfurile pentagonului formau cuvîntul[1] „υγιθα" corespunzînd cuvîntului „salut".

După concepția pitagoreicilor numerele reprezentau esența tuturor lucrurilor. Întregul univers constituie o armonie de numere, atribuindu-se acestora proprietăți mistice. Numărul nu reprezintă ca pentru noi, cei de azi, un simbol abstract, care permite evaluarea unei mulțimi sau mărimi, prin numărare, măsurare, cîntărire,..., ci o realitate concretă. Pitagoreicii atribuiau nume-



„PENTAGRAMA"

relor o existență de sine stătătoare. Numerele sînt lucrurile înseși, sau, ceea ce e totuna, lucrurile sînt compuse din numere. „MUNDUM REGUNT NUMERI" (numărul guvernează lumea). Pitagoreicii reprezentau numerele sub forma unor puncte aranjate în diferite moduri, obținînd astfel unele figuri geometrice. În acest mod apare noțiunea de *numere figurative*, realizînd pentru prima oară o legătură dintre *aritmetică* și *geometrie*. Fiecare punct simbolizează o unitate, un *atom material*, este înconjurat de un cîmp gol, și nu admite nici o fracțiune. Figurile geometrice se nasc, se compun și se descompun numai cu ajutorul numerelor întregi.

După modul în care sînt așezate, numerele pot fi: **Liniare, Plane sau Solide**, obținînd astfel geometria pe o *dreaptă*, geometria *plană* sau geometria în *spațiu*.

Cele mai *simple* numere *liniare, plane* sau *solide* sînt numerele 2, 3, 4. Numărul 2 determină poziția unei *drepte*. Numărul 3 determină cea mai simplă figură plană, *triunghiul*, iar 4 determină cel mai simplu corp din spațiu, *tetraedrul*[2].

Descompunerea numerelor se putea face și cu ajutorul echerelor. Presupunem un șir de echere care se îmbină unul în altul. Dacă primul echer conține un punct, al doilea 3, al treilea 5,..., se constată că suma primelor n numere *impare* formează un pătrat de latură n (fig. 1). Se obțin astfel **numerele pătratice**

$$1=1^2,\ 1+3=2^2,\ 1+3+5=3^2,\ 1+3+5+7=4^2,\ldots,$$

iar suma primelor n numere *impare* va fi:

$$S_n=1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

[1] provine din cuvîntul υγιεια, diftongul ει fiind înlocuit prin θ.
[2] În limbajul matematic modern SIMPLEXUL din R_1, R_2, R_3.

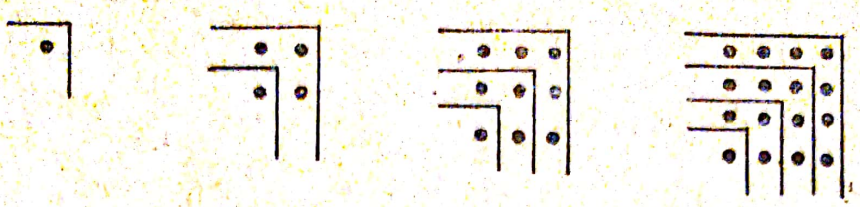


Fig. 1

Echerele care conțin numerele pare formează dreptunghiuri.
Primul dreptunghi conține două puncte, al doilea 6, al treilea 12,...

$$2=1\cdot 2,\ 2+4=2\cdot 3,\ 2+4+6=3\cdot 4,\ 2+4+6+8=4\cdot 5,\ldots$$

Se obțin astfel **Numerele dreptunghiulare.**

Se constată direct din figura 2 că suma primelor n numere pare, formează un dreptunghi de dimensiuni n și $n+1$.

$$S_n=2+4+6+\ldots+2n=n(n+1).$$

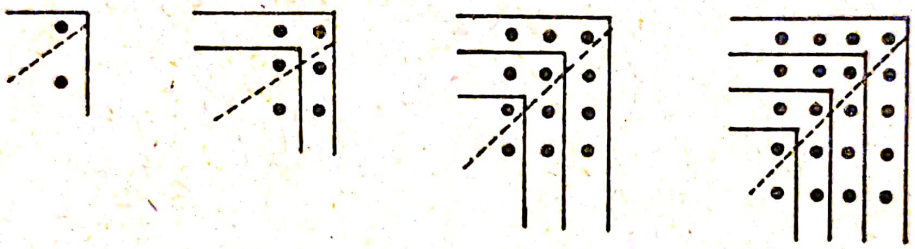


Fig. 2

Dacă dreptunghiurile din figura 2 se împart în două părți egale printr-o diagonală se obțin **Numerele triunghiulare.**

Echerele vor conține numerele întregi consecutive.

Numerele triunghiulare se mai pot așeza și sub forma din figura 3:

$$1=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2,\quad 1+2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3,\quad 1+2+3=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4,$$

$$1+2+3+4=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5,\ldots,$$

iar suma primelor n numere întregi va fi:

$$S_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

Fig. 3

Scanned with OKEN Scanner

Dacă vom așeza **două** numere triunghiulare unul lîngă altul, așa ca în figura 4 (numerele situate în ultima linie să se suprapună), se obțin numerele pătratice.

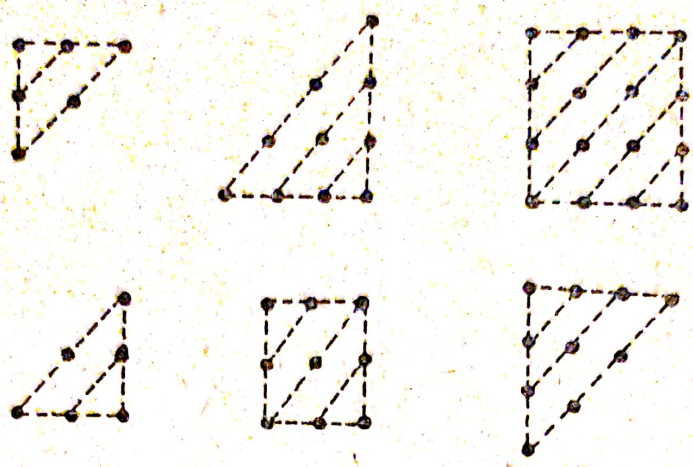


Fig. 4

Dacă vom reuni în același mod, **trei** numere triunghiulare (fig. 5) se obțin **Numerele pentagonale.**

$$S_1=1,\ S_2=1+4=5,\ S_3=1+4+7=12,$$
$$S_4=1+4+7+10=22.$$

Aceste numere formează o progresie aritmetică cu rația 3 și primul termen egal cu 1:

$$1,\ 1+3\cdot 1,\ 1+3\cdot 2,\ 1+3\cdot 3,\ldots,\ 1+3(n-1),$$

iar suma primelor n **Numere pentagonale** va fi:

$$S_n=n+3\cdot[1+2+3+\ldots+(n-1)]=n+$$
$$+\frac{3}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}n(3n-1).$$

În mod analog se obțin **Numerele hexagonale.**

$$S_1=1,\ S_2=1+5=6,\ S_3=1+5+9=15,$$
$$S_4=1+5+9+13=28.$$

Aceste numere formează o progresie aritmetică cu rația 4 și primul termen egal cu 1 (fig. 6):

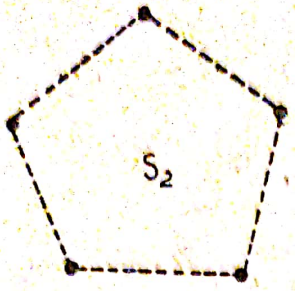
$$1,\ 1+4\cdot 1,\ 1+4\cdot 2,\ 1+4\cdot 3,\ldots,\ 1+4(n-1).$$

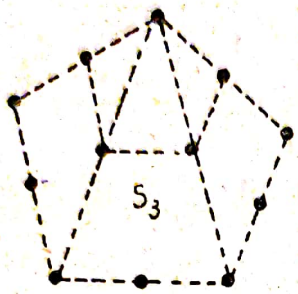
Suma primelor n **Numere hexagonale va fi**

$$S_n=1+5+9+13+\ldots+(4n-3)=n(2n-1).$$

Generalizînd, se obține formula care ne dă numerele poligonale cu p laturi. Fiecărui poligon îi corespunde astfel, un șir de numere ce se obține prin însumarea unei progresii aritmetice cu primul termen egal cu unitatea și rația egală cu numărul laturilor mai puțin două:

$$1,\ 1+1\cdot(p-2),\ 1+2\cdot(p-2),\ldots,\ 1+(n-1)(p-2);$$
$$S_n=1+(p-1)+\ldots+(np-2n-p+3)=$$
$$=\frac{n}{2}[n(p-2)-(p-4)].$$





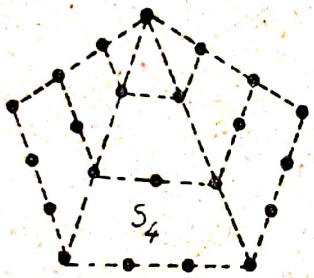
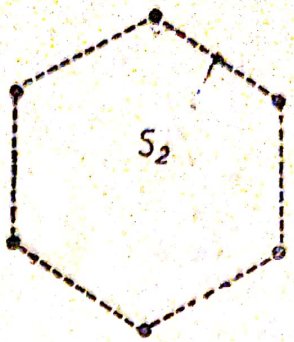


Fig. 5



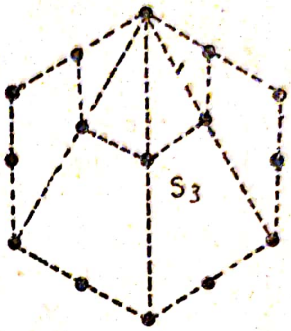


Fig. 6

k \ i	1	2	3	...	n	S_n
3	1	2	3	...	n	$n(n+1)/2$
4	1	3	5	...	$2n-1$	n^2
5	1	4	7	...	$3n-2$	$n(3n-1)/2$
6	1	5	9	...	$4n-3$	$n(2n-1)$
7	1	6	11	...	$5n-4$	$n(5n-3)/2$
8	1	7	13	...	$6n-5$	$n(3n-2)$
9	1	8	15	...	$7n-6$	$n(7n-5)/2$
10	1	9	17	...	$8n-7$	$n(4n-3)$
...	...	...	...	...	...	.....
p	1	$p-1$	$2p-3$	...	$1+(n-1)(p-2)$	$\frac{n}{2}[n(p-2)-(p-4)]$

Scanned with OKEN Scanner

În tabela de mai sus se pot vedea: suma primilor 3 termeni, termenul general (de ordinul n), precum și suma primelor n numere triunghiulare, pătratice, pentagonale,..., decagonale,... p-gonale.

Pentru a obține numerele pătratice, pitagoreicii mai foloseau și metoda denumită *stadion*. Pentru a găsi de exemplu pe 6^2, se scriu numerele de la 1 la 6 și înapoi de la 6 la 1 așa ca în fig. 7.

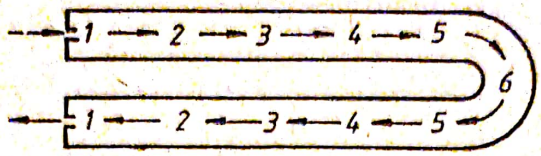


Fig. 7

Făcînd suma acestor numere se obține:

$$2(1+2+3+4+5)+6=2\cdot\frac{(5+1)}{2}\cdot 5+6=6\cdot 5+6=6^2.$$

În general, pătratul unui număr oarecare n se va obține însumînd numerele așezate pe stadionul din figura 8:

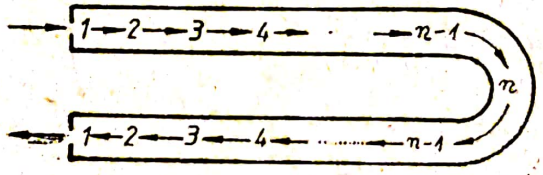


Fig. 8

Se constată că, numărul 1 se află la intrarea și la ieșirea din *stadion*, iar numărul n a cărui pătrat se cere este situat la cotitură.

Dacă vom însuma numerele situate pe acest *stadion* se obține:

$$2[1+2+3+\ldots+(n-1)]+n=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+n=n^2.$$

Geometria figurativă în *spațiu* a condus la studierea numerelor *solide*, cele mai simple fiind **numerele tetraedrale.** Aceste numere se obțin prin suprapunerea **numerelor triunghiulare** așezate pe plane paralele. Se determină astfel tetraedre, ale căror fețe sînt triunghiuri echilaterale egale (fig. 9).

Formula care ne dă suma a n numere **tetraedrale.**

Din figura 9 se constată că:

$$S_1=1,\ S_2=1+3=4,\ S_3=1+3+6=10,$$
$$S_4=1+3+6+10=20,\ldots$$

$$S_n=1+3+6+\ldots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\sum_1^n k(k+1)=$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

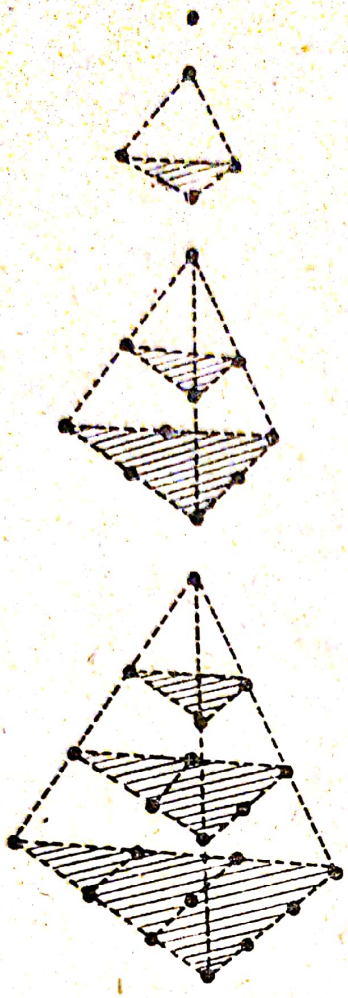


Fig. 9

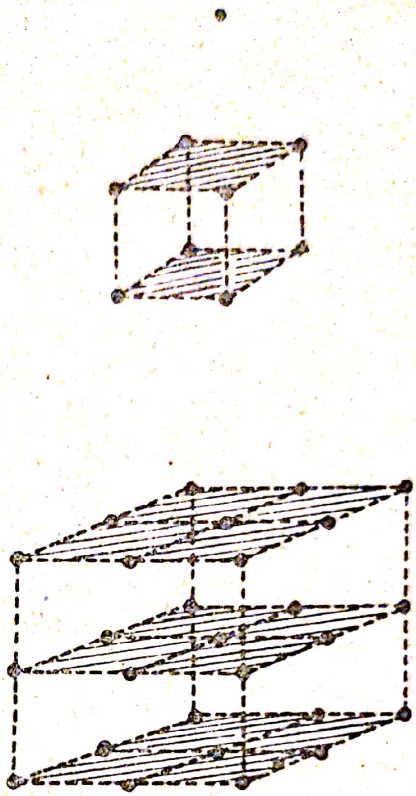


Fig. 10

Pentru $n=1, 2, 3, 4$ găsim:

$$S_1=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1; \quad S_2=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 4=4;$$

$$S_3=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 5=10; \quad S_4=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 5\cdot 6=20.$$

Numerele cubice erau formate din **cuburi** avînd latura egală cu $1, 2, 3, \ldots, n$, așa cum se vede în figura 10.

$$V_1=1^3=1, \quad V_2=4+4=2^3,$$
$$V_3=9+9+9=3^3.$$

Formula care ne dă suma cuburilor primelor n numere naturale este:

$$S_n=1^3+2^3+3^2+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Pentru $n=1, 2, 3$ obținem:

$$S_1=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot 2^2=1, \quad S_2=\frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot 3^2=9,$$

$$S_3=\frac{1}{4}\cdot 3^2\cdot 4^2=36.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog erau formate și alte numere solide: numerele **Paralelipipedice, Prismatice, Piramidale,...**

Dintre toate aceste denumiri folosite pentru numerele figurative se mai păstrează astăzi **pătratul** și **cubul** unui număr.

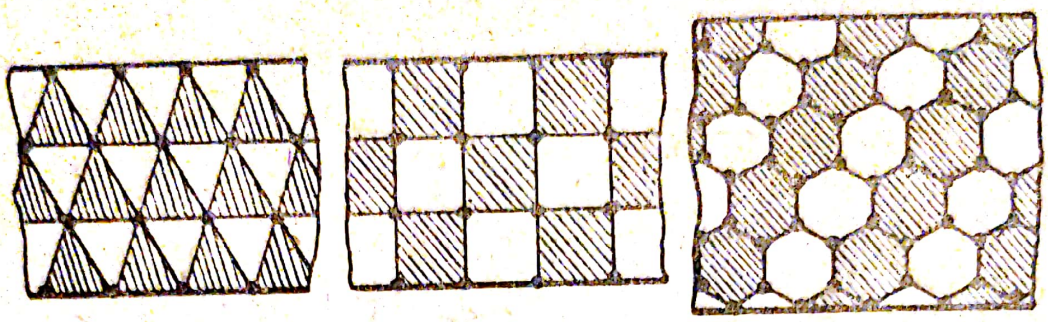


Fig. 11

*

Pitagora a întocmit de asemenea și *Tabela înmulțirii*. Cunoscută și sub numele de *Tabela* lui *Pitagora*, ne permite să cunoaștem produsul a două numere naturale $a \times b$ unde $a,\ b \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

În geometrie, i se atribuie propoziția din care rezultă că: „un plan poate fi acoperit cu poligoane regulate identice dacă folosim triunghiuri echilaterale, pătrate sau hexagoane" (fig. 11).

Această afirmație se justifică astfel. Notăm cu m numărul poligoanelor ce au cîte un vîrf comun și deci unul din cele m unghiuri va fi $360:m$. Cum unghiul unui poligon regulat cu n laturi are $180°\ (n-2):n$ grade, se deduce egalitatea:

$$\frac{180°(n-2)}{n}=\frac{360°}{m},\ \text{adică}\ n=2+\frac{4}{m-2}$$

m și n fiind numere întregi se obține:
$m=3,\ n=6;\ m=4,\ n=4;\ m=6,\ n=3$. Deci, planul poate fi acoperit numai cu hexagoane regulate, pătrate sau triunghiuri echilaterale.

*

Au fost studiate de asemenea numerele **Perfecte, Imperfecte** și **Supraperfecte.**

Un număr se numește **Perfect** dacă suma S a divizorilor săi (exceptînd numărul însuși) este egală cu numărul dat N. Dacă $S>N$, numărul este **Supraperfect**, iar dacă $S<N$, numărul este **Imperfect.**

Mai tîrziu, Euclid (sec. 3 î.e.n.) dă formula numerelor perfecte: $N=2^{p-1}\cdot(2^p-1)$, unde p și 2^{p-1} sînt numere prime. Pentru $p=2, 3, 5$, se obțin numerele perfecte:

$$6=1+2+3;\quad 28=1+2+4+7+14;$$

$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248.$$

Se cunosc pînă acum 18 numere perfecte, ultimul se obține pentru $p=3217$ și are aproximativ 2000 de cifre.

Scanned with OKEN Scanner

Numerele:

$$12<1+2+3+4+6; \quad 18<1+2+3+6+9;$$

$$20<1+2+4+5+10$$

sînt supraperfecte, iar numerele:

$$14>1+2+7; \quad 16>1+2+4+8; \quad 22>1+2+11$$

sînt imperfecte.

În școala pitagoreică erau studiate și **Numerele prietene** (fiecare din ele este egal cu suma divizorilor celuilalt). Lui Pitagora i se atribuie găsirea primei perechi de numere prietene, 220 și 284.

$$220=1+2+4+71+142;$$

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110.$$

A doua pereche de numere prietene a fost găsită abia în anul 1636 de Pierre Fermat:

$$N_1=2^4\cdot 23\cdot 47=17296; \quad N_2=2^4\cdot 1151=18416.$$

Mersenne în 1644 găsește a treia pereche:

$$N_1=9363\,584; \quad N_2=9437056.$$

Pînă în anul 1943 se cunoșteau 390 perechi de astfel de numere.

*

Teoria cosmogonică a lui Pitagora presupune că toate corpurile cerești erau situate pe zece sfere și se roteau pe niște traiectorii circulare, în jurul unui foc sacru. Apare pentru prima oară ipoteza că pămîntul nu se află în centrul lumii, abandonînd astfel teoria geocentrică.

*

Teoria muzicală se sprijinea pe următoarele două legi fundamentale:

1. Lungimea corzilor este invers proporțională cu frecvențele sunetelor emise.

Se știe că, dacă o coardă este mai scurtă, înălțimea sunetului (dată de numărul de vibrații pe secundă, adică frecvența) este mai mare. Dacă raportul lungimilor a două corzi este 1/2, raportul frecvențelor emise de aceste corzi este 2/1.

Vom spune că sunetul mai înalt produs de coarda scurtă se află în *octavă* față de sunetul mai jos, produs de coarda lungă. Dacă raportul lungimilor a două corzi este 3/2, raportul frecvențelor este 2/3.

Sunetele formează intervalul muzical numit *cvintă*.

Raportului 3/4 îi corespunde intervalul numit *cvartă*.

În general, dacă notăm cu l_1/l_2 raportul lungimilor a două corzi și cu f_1/f_2 raportul frecvențelor, legea enunțată mai sus se poate exprima prin proporția:

$$l_1 : l_2 = f_2 : f_1.$$

2. Legea consonanței. Sunetele muzicale (consonanțele) se obțin numai atunci cînd lungimile corzilor ce le emit, se află într-un raport exprimat prin numere întregi.

Din această lege rezultă că, dacă raportul lungimilor a două corzi nu este un număr rațional, atunci nu se mai obțin consonanțe ci disonanțe (adică zgomote).

*

În școala pitagoreică erau cunoscute proporțiile și mărimile medii. Dacă $a>b>c$ sînt 3 numere întregi atunci b este:

media aritmetică, dacă $(a-b):(b-c)=a:a$;

media geometrică, dacă $(a-b):(b-c)=a:b$;

media armonică, dacă $(a-b):(b-c)=a:c$.

Dacă notăm cu m_a, m_g, m_h, media aritmetică, geometrică și armonică a numerelor a și c, din relațiile de mai sus se deduce:

$$m_a=\frac{a+c}{2}, \qquad m_g^2=a\cdot c; \qquad m_h=\frac{2ac}{a+c}.$$

Folosind media aritmetică și media armonică a numerelor a și c se obține *proporția muzicală*:

$$a:m_a=m_h:c; \text{ sau } m_a\cdot m_h=a\cdot c.$$

Exemplu. Fie $a=12$ și $c=6$ lungimile a două corzi. Raportul lor formează *octava* $(12:6=2:1)$, media lor aritmetică $(12+6):2=9$, formează *cvarta* $(12:9=4:3)$, iar media armonică $2\cdot 12\cdot 6:(12+6)=8$ formează *cvinta* $(12:8=3:2)$. Termenii proporției sînt: $a=12$; $m_a=9$; $m_h=8$, $c=6$. Se constată că proporția muzicală este satisfăcută $(12:9=8:6$ sau $8\cdot 9=12\cdot 6)$.

*

O altă propoziție cunoscută în școala lui Pitagora: *Într-un triunghi dreptunghic, pătratul construit pe una din catete este echivalent cu dreptunghiul construit pe ipotenuză și proiecția acelei catete pe ipotenuză.*

Demonstrația 1 (folosind teoria proporțiilor, fig. 12).

$ABD\sim ABC$, avînd $\widehat{ADB}=\widehat{BAC}=90°$ și $\widehat{BAD}=\widehat{ACD}$ avînd laturile perpendiculare și îndreptate în același sens $(AB\perp CA,\ AD\perp CD)$.

Rezultă proporția:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}; \quad AB^2=BC\times BD \text{ (c.c.t.d.)}.$$

În mod analog, folosind asemănarea triunghiurilor ADC și ABC se arată că $AC^2=BC\times DC$.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația 2 (dată de Euclid în **Elemente** *cartea I-a, bazată pe echivalență de arii, fig. 13).*

$$\text{aria } ABB_2 = \frac{1}{2} BB_2 \times BD = \frac{1}{2} \text{ aria } BDD_1B_2,$$

$$\text{aria } BCB_1 = \frac{1}{2} BB_1 \times AB = \frac{1}{2} \text{ aria } ABB_1A_1.$$

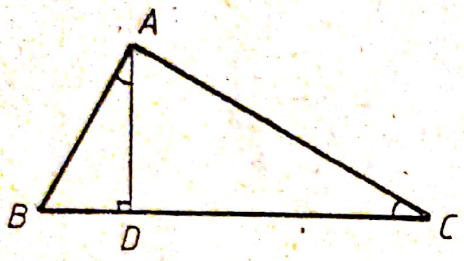


Fig. 12

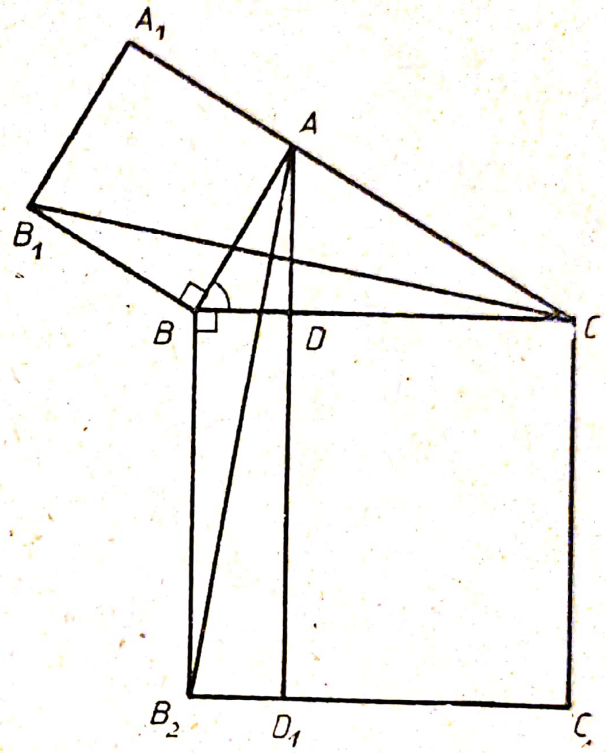


Fig. 13

Cum $\Delta ABB_2 = \Delta BCB_1$ ($BB_2 = BC$, $AB = BB_1$, $\widehat{ABB_2} = \widehat{B_1BC} = 90° + \widehat{ABC}$), rezultă:

aria ABB_1A_1 = aria $BDD_1B_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB^2 = BC \times BD$ (c.c.t.d.).

Pătratul construit pe cateta AB este egal cu dreptunghiul construit pe ipotenuză și proiecția ei, BD, pe ipotenuză.

O construcție similară ne permite să arătăm că:

Pătratul construit pe cateta AC este egal cu dreptunghiul construit pe ipotenuză și proiecția ei, DC, pe ipotenuză.

În limbajul actual această propoziție se enunță astfel: *Într-un triunghi dreptunghic, o catetă este media geometrică între ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză.*

Teorema lui Pitagora, una din cele mai vechi teoreme cunoscute în geometrie, s-a bucurat în toate timpurile de o mare popularitate, atît prin aplicațiile ei în știință și în tehnică prin generalizările și particularizările ei sub diferite aspecte, dar mai ales prin numărul mare de demonstrații ce i s-au dat.

Proclus Diadochus (410—485 e.n), unul din principalii comentatori ai celebrelor *Elemente* ale lui Euclid, arată că teorema lui Pitagora i-a fost atribuită acestuia de către Plutarh, Diogene Laertius și Atheneus.

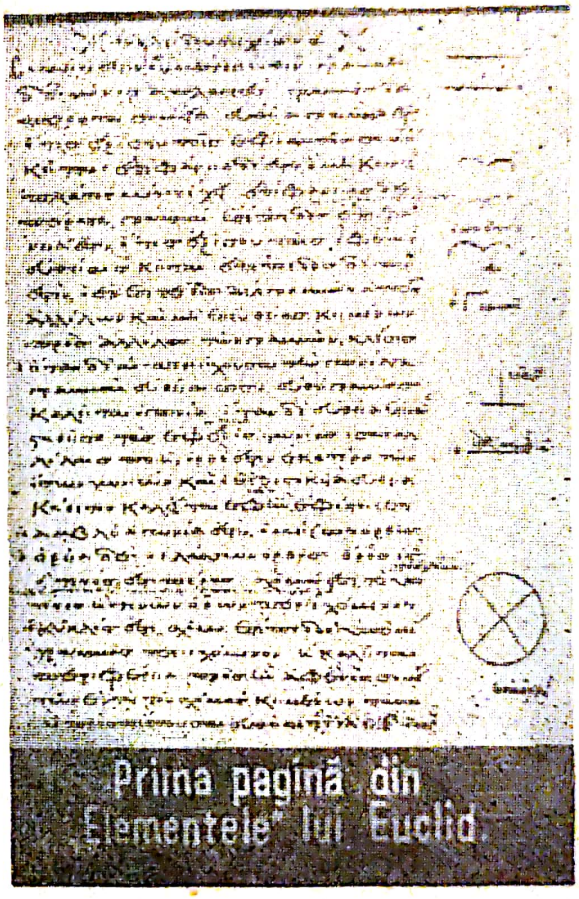
Pe baza unei legende se spune că Pitagora a adus jertfă zeilor 100 de boi pentru această frumoasă descoperire.

„În ce mă privește", spune Proclus, „în vreme ce eu admir pe acela care cel dintîi a observat adevărul acestei teoreme, admir și mai mult pe autorul

Elementelor, nu numai fiindcă a evidențiat-o printr-o demonstrație mai clară, ci și pentru că a generalizat-o în cartea a VI-a prin argumentele sigure ale științei".

*

Euclid (cca 330—275) a fost unul din marii matematicieni ai antichității eline. Opera sa fundamentală, *Elemente*, sintetizează cunoștințele matematice din acea vreme și este cea dintîi expunere sistematică a matematicii elementare. *Elementele* nu sînt o operă originală a lui Euclid. Lui îi revine însă meritul de a fi adunat, ordonat și completat în această operă toate teoremele și problemele cunoscute înaintea lui și de a le fi expus cu o claritate rar întîlnită. Claritatea expunerii lui Euclid a rămas proverbială. Pascal spunea că în copilăria lui a citit *Elementele* lui Euclid ca o poveste.



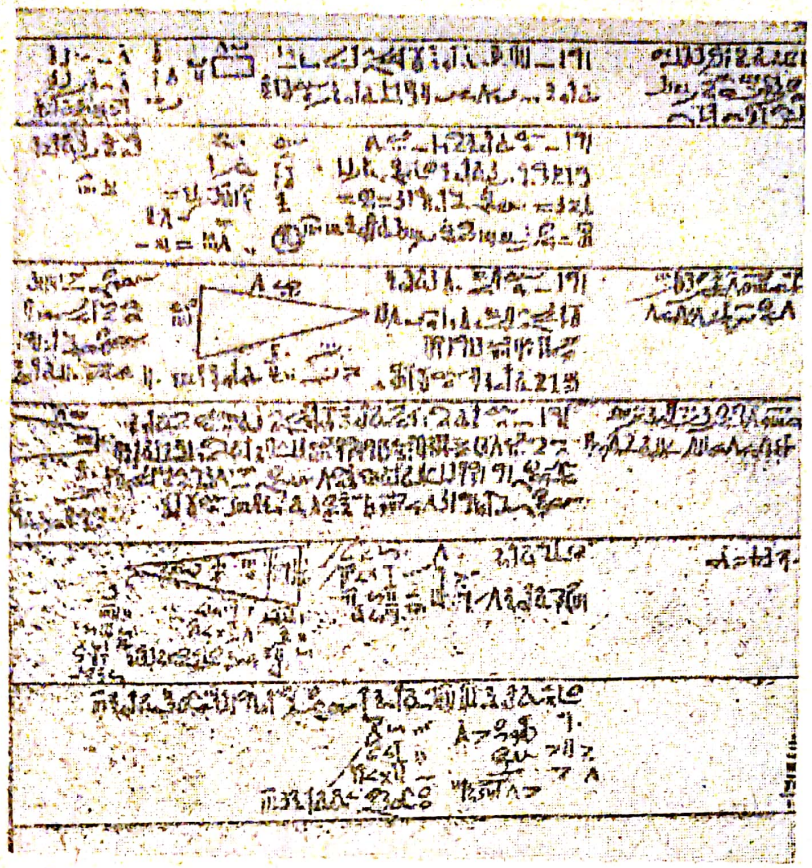
Prima pagină din „Elementele" lui Euclid

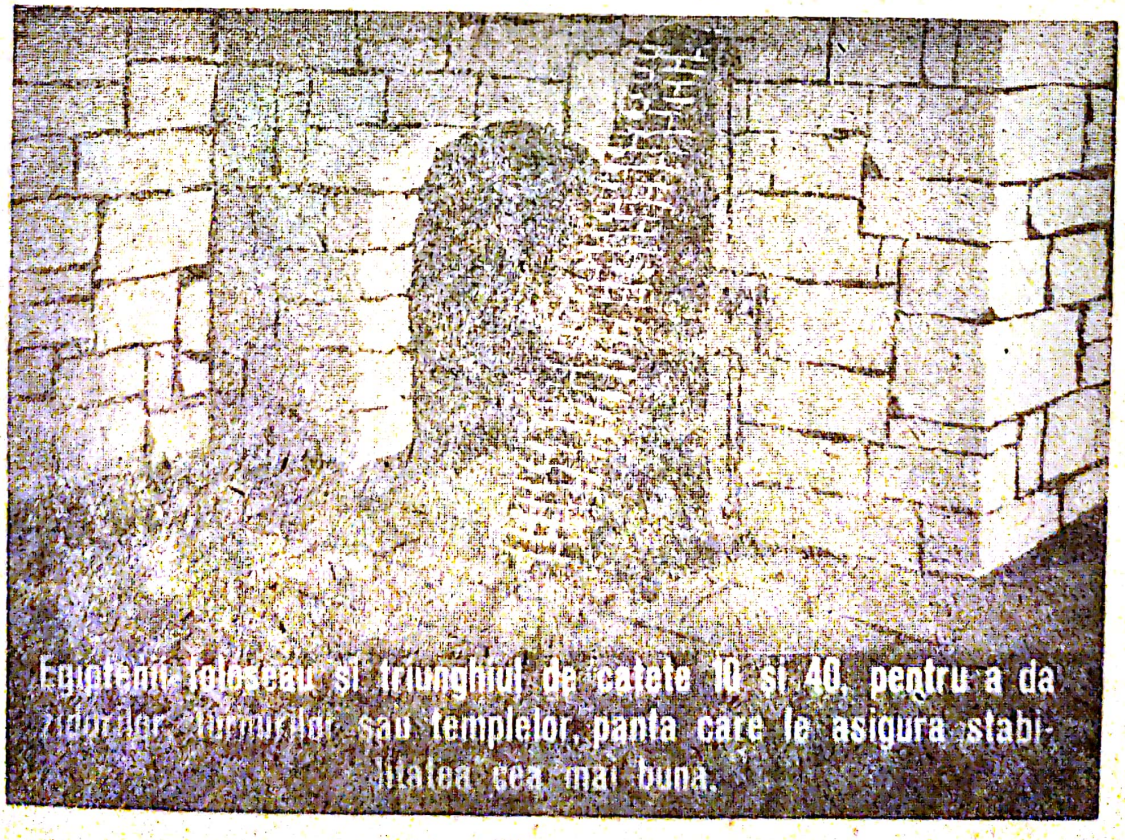
Newton, cînd a văzut cu ce claritate sînt expuse teoremele și problemele, nu le-a mai citit, spunînd că ele sînt periculoase deoarece nu te mai lasă să gîndești. Expunerea euclidiană a fost atît de apreciată de oamenii de știință din toate timpurile, încît a servit ca model de prezentare pentru științele raționale. Matematicieni mari ca Apollonius, Galileo, Newton și alții au obținut lucruri noi prin mijloace găsite de ei, dar nu le-au dat publicității pînă nu le-au pus sub forma expunerii sintetice din cărțile lui Euclid.

A organizat și a condus secția de matematici a vestitei biblioteci din Alexandria pe timpul lui Ptolemeu I, regele Egiptului. Se povestește că Ptolemeu l-ar fi întrebat odată, dacă pentru studiul geometriei nu există un drum mai scurt decît Elementele, la care Euclid a răspuns: „în geometrie nu există drumuri regale".

Stobaeus (cca. 500 e.n.) povestește următoarea anecdotă:

Scanned with OKEN Scanner



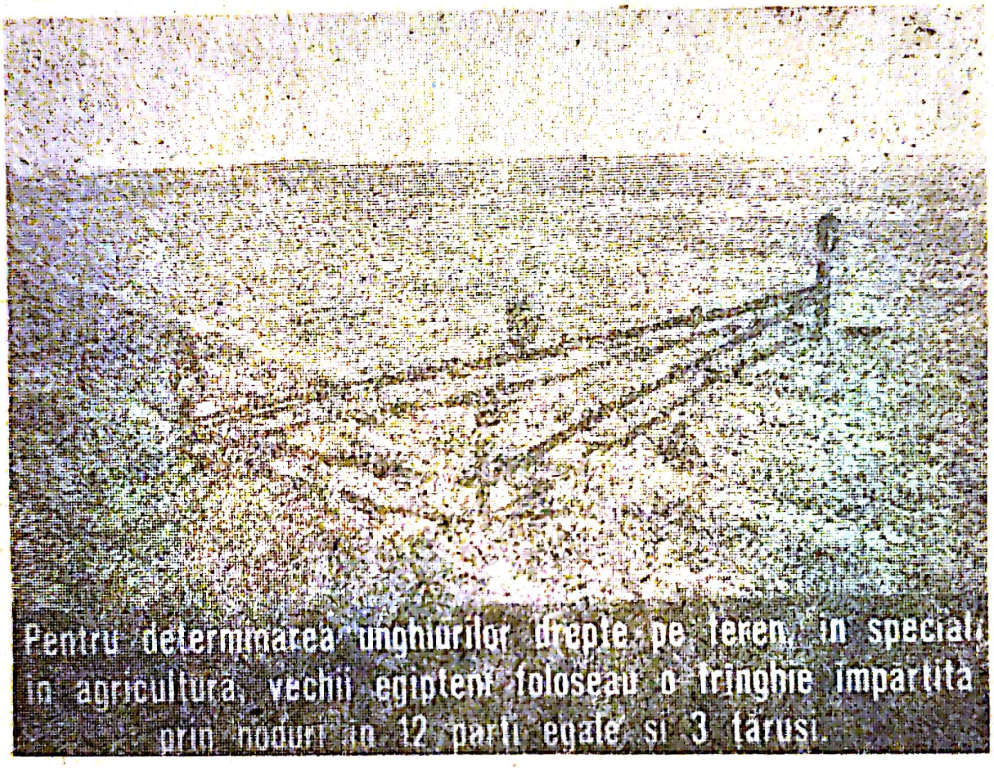


Egiptenii foloseau si triunghiul de catete 10 si 40, pentru a da zidurilor, turnurilor sau templelor, panta care le asigura stabilitatea cea mai buna.

„Cineva care a început să studieze geometria de la Euclid, după ce a învățat întîia teoremă, l-a întrebat: Dar ce folos voi avea eu învățînd aceste lucruri? Euclid își chemă sclavul și-i zise: dă-i acestuia trei oboli, fiindcă el vrea să cîștige din ceea ce învață".

Se știe că teorema lui Pitagora era cunoscută de babilonieni și de egipteni cu mult înaintea lui, pentru anumite cazuri particulare, dar nedemonstrată în general pentru toate triunghiurile dreptunghice.

Așa cum rezultă din papirusul lui Ahmes (cca 1800 î.e.n.) cunoscut sub numele de papirusul lui Rhind (lung de 20 m și lat de 30 cm), precum și din



Pentru determinarea unghiurilor drepte pe teren, în special în agricultură, vechii egipteni foloseau o frînghie împărțită prin noduri în 12 părți egale și 3 țăruși.

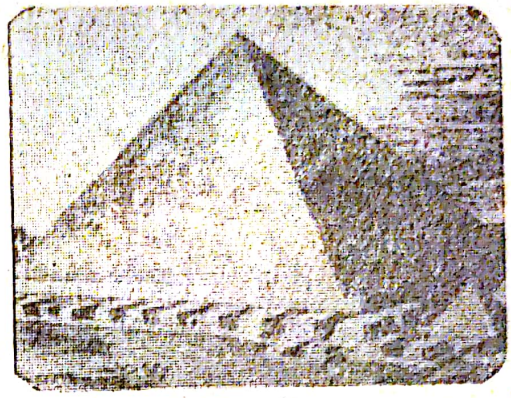
așa-numitul „papirus de la Moscova" (cca 1850 î.e.n.), vechii egipteni cunoșteau triunghiul ale cărui laturi sînt 3, 4, 5 precum și alte cîteva asemenea cu el. Egiptenii foloseau și triunghiul de catete 10 și 40, pentru a da zidurilor, turnurilor sau templelor panta care le asigură stabilitatea cea mai bună. Pentru determinarea unghiurilor pe teren, în special în agricultură, egiptenii foloseau o frînghie împărțită prin noduri în 12 părți egale și 3 țăruși. În acest mod, unghiul B este de 90°, deoarece laturile triunghiului ABC sînt 3, 4, 5.

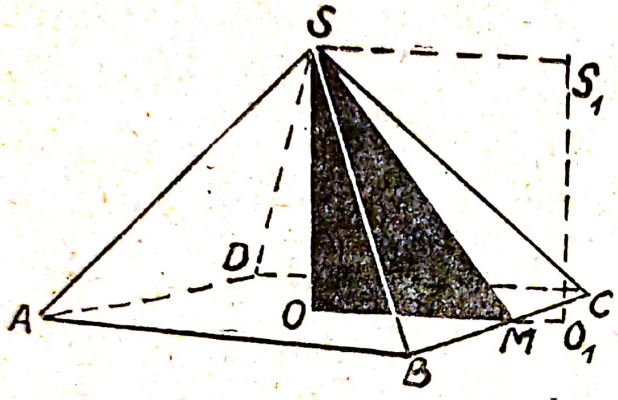
În marea piramidă a lui Keops (cca 2500 î.e.n.), înălțimea SO, apotema bazei OM și apotema piramidei SM sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5 (cu o eroare de 2%). Triunghiul SOM este numit **Triunghi de aur.**
Este interesant de constatat că, dacă considerăm perimetrul bazei ($4 \times 232,805 = 931,22$ m) drept lungimea unei circumferințe, iar înălțimea piramidei (148,208 m) drept rază, obținem pentru π valoarea 3,1416 și aceasta corespunde valorii lui π cu o eroare de 1/100.000 ($\pi = 3,14159...$).

De la Herodot se păstrează următoarea mărturisire: „Preoții egipteni m-au învățat că în marea piramidă a lui Keops, aria pătratului construit pe înălțime (avînd înălțimea drept latură) este exact egală cu aria fiecărei

fețe triunghiulare". În limbajul matematic modern, afirmația lui Herodot este echivalentă cu egalitatea: $SO^2 = BC \cdot SM : 2$, care se verifică cu aproximație de 2/1 000.

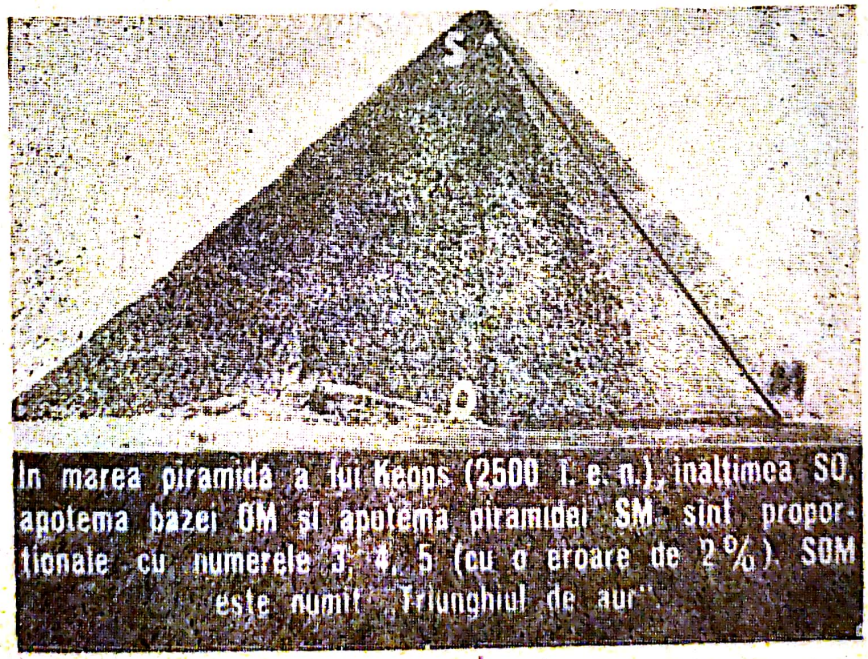
Herodot arată că pătratul construit pe înălțimea SO ca latură este egal cu suprafața fiecărei fețe triunghiulare:





$$SO^2 = \frac{1}{2} \cdot BC.SM$$

(cu o eroare de 1/1000)



În marea piramidă a lui Keops (2500 î. e. n.), înălțimea SO, apotema bazei OM și apotema piramidei SM sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5 (cu o eroare de 2 %). SOM este numit „Triunghiul de aur".

$SO^2 = 148{,}2 \times 148{,}2 = 21963$ m²,

$BC \cdot SM : 2 = 232{,}8 \times 188{,}5 = 21941$ m².

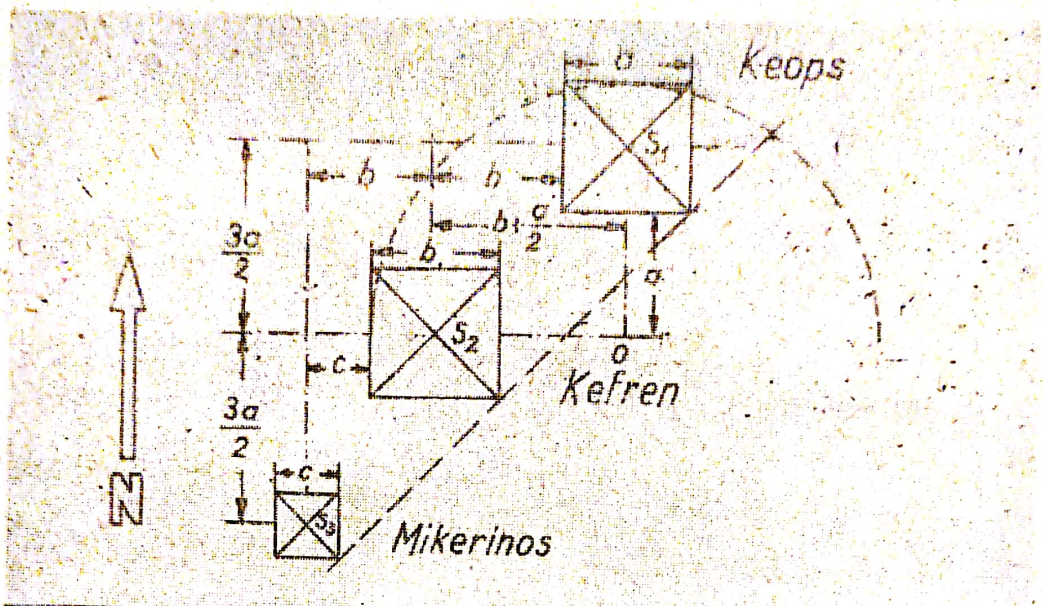
Triunghiul SOM din clișeele de mai jos este triunghiul de aur.

În alt clișeu se poate vedea poziția celor trei piramide de la Gizeh: Keops, Kefren și Mikerinos, în care apotema bazei, înălțimea și apotema piramidei

Scanned with OKEN Scanner

sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5. Poziția este dată în funcție de lungimea laturilor: $a=233$ m; $b=215$ m; $c=108$ m.

Apariția numerelor irafionale. Se presupune că primul număr irațional apărut în matematici a fost $\sqrt{2}$. Într-adevăr, aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic isoscel ABC se obține $d^2=2a^2$. Dacă $a=1$, $d=\sqrt{2}$,



Poziția reciprocă a celor trei piramide mari de la Gizeh: Keops, Kefren și Mikerinos, în care apotema bazei, înălțimea și apotema piramidei sînt proporționale cu numerele 3, 4, 5.

și deci diagonala pătratului este incomensurabilă cu latura sa (fig. 14). Platon era convins că irafionalitatea numărului $\sqrt{2}$ prezintă o importanță deosebită în geometrie și trebuie cunoscută de toți oamenii, căci spune el: *nu e demn să poarte numele de om acela care nu știe că diagonala pătratului este incomensurabilă cu latura sa.*

Teorema lui Pitagora ne conduce astfel la segmente incomensurabile, deoarece nu se poate găsi o măsură comună pentru latura și diagonala unui pătrat. Astfel de numere erau considerate în acea vreme ca inaccesibile gîndirii umane. Numărul $\sqrt{2}$ nu putea fi exprimat ca raport a două numere întregi, oricare ar fi fost aceste numere. Dar această constatare era în contradicție flagrantă cu ideea pe care se sprijină întregul edificiu al școlii pitagoreice, care susține că la baza tuturor lucrurilor stă numărul întreg. Descoperirea segmentelor incomensurabile chiar de către pitagoreici a fost mult timp ascunsă și păstrată ca un mare secret. Pe baza unei legende se spune că Hippasos din Metapont, unul dintre adepții școlii lui Pitagora, a fost pedepsit de zei (murind în urma unui naufragiu), deoarece a divulgat taina descoperirii numerelor incomensurabile.

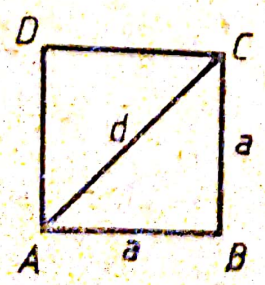


Fig. 14

Pentru a demonstra irafionalitatea numărului $\sqrt{2}$ se cunosc mai multe metode:

1. Metoda dată de Euclid în cartea 10 din ELEMENTE, prin reducere la absurd folosind vechea teorie a **Parului și Imparului.**

Fie b diagonala unui pătrat de latură a.

Teorema lui Pitagora ne permite să scriem:

$$b^2=2a^2 \qquad (1)$$

$$\sqrt{2}=b:a.$$

Vom presupune că a și b sînt numere naturale prime între ele (fracția $b:a$ este ireductibilă). Din relația (1) rezultă că b este par și deci de forma $b=2c$. Dar atunci (1) devine $a^2=2c^2$, deci, și a trebuie să fie par. Cum a și b nu pot fi simultan pare (deoarece am presupus că sînt prime între ele), rezultă că $\sqrt{2}$ nu poate fi egal cu raportul a două numere naturale.

2. Metoda geometrică. Fie triunghiul dreptunghic ABC, jumătate din pătratul de latura a și diagonală c (fig. 15). Deoarece avem $c^2=2a^2$, rezultă că c trebuie să fie par și deci ipotenuza $AB=c$ trebuie să fie formată dintr-un număr par de segmente. Înălțimea $h_1=c:2$ taie ipotenuza AB la mijlocul ei, E_1. Folosind același procedeu, după n astfel de operații se obține șirul de numere:

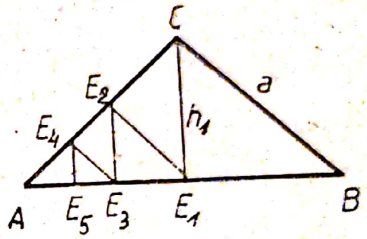


Fig. 15

$$c, \frac{c}{2}, \frac{c}{2^2}, \frac{c}{2^3}, \ldots, \frac{c}{2^n}.$$

Dar numărul natural c care știm că este par nu poate fi înjumătățit peste orice limită. Va trebui să ajungem după un număr finit n de astfel de operații de înjumătățire la un număr *impar*, sau *unitate*[3]. Aceasta înseamnă că punctul de înjumătățire nu va mai fi situat între două segmente, ceea ce este absurd, deoarece am presupus că diagonala $AB=c$ se compune dintr-un număr par de c astfel de segmente.

3. Folosind proporția muzicală. Această metodă se sprijină pe teoria matematică a consonanțelor. Am arătat mai înainte că, între media aritmetică și armonică (m_a și m_h) a două numere (a și b) se poate stabili proporția muzicală, care este de forma:

$$a:m_a=m_h:b,$$

unde $m_a=(a+b):2$; $m_h=2ab:(a+b)$.

Pentru $a=1$, $b=2$ se obține $m_a=3:2$, $m_h=4:3$, care verifică proporția muzicală. Pentru a avea armonie (consonanță) intervalul unei octave cere o împărțire neegală. Astfel, dacă o coardă dă un anumit sunet, cvinta se obține la 2:3, iar cvarta la 3:4 din lungimea sa. Dacă octava este împărțită în două intervale egale $x:y$, proporția muzicală (pentru $a=1$, $b=2$) devine:

$$\frac{1}{x:y}=\frac{x:y}{2};\quad y:x=\sqrt{2}.$$

[3] Dacă $c=64$, se obține șirul: 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, cu ultimul termen 1; dacă $c=240$, se obține șirul 240, 120, 60, 30, 15, cu ultimul termen număr impar 15.

Scanned with OKEN Scanner

Se constată însă că, dacă lungimea corzilor este în raportul $x:y=1:\sqrt{2}$, nu se mai obține o consonanță ci o disonanță (un zgomot). De aici rezultă că numărul $\sqrt{2}$ nu poate fi exprimat ca raport dintre două numere întregi.

4. Calculul aproximativ al lui $\sqrt{2}$. O altă metodă care conduce la justificarea iraționalității lui $\sqrt{2}$, precum și a celorlalte numere iraționale de forma $\sqrt{a}$ (unde a nu este un pătrat perfect) se sprijină pe calculul aproximativ al acestor numere[4].

a) *Folosind dezvoltarea binomului:*

$$(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5-\ldots$$

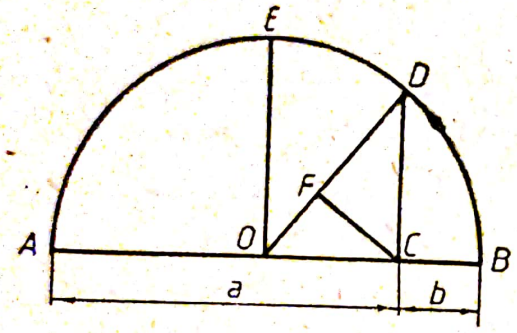


Fig. 16

Pentru $x=1$, suma primilor 6 termeni ne dă:

$$\sqrt{2}\cong 1+0{,}5-0{,}125+0{,}0625-0{,}0390+$$
$$+0{,}0273=1{,}4258.$$

b) *Prin dezvoltarea în fracție continuă după formula:*

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ldots}}.$$

Dacă se consideră numai primele 5 fracții etajate, pentru $a=b=1$, se obține: $\sqrt{2}\cong 1+\cfrac{1}{2+\ldots}=1{,}41420$ și reprezintă o valoare cu o aproximație de $1/100\,000$ ($\sqrt{2}=1{,}4142\,(356\ldots)$).

c) *Folosind mărimile medii.* Se știe că, între media aritmetică m_a, media geometrică m_g și media armonică m_h, a două numere a și b există relațiile:

$$m_h=m_g^2:m_a \qquad (2)$$

$$m_h\leqslant m_g\leqslant m_a, \qquad (3)$$

$$m_a=\frac{a+b}{2},\quad m_g=\sqrt{a\cdot b},\quad m_h=\frac{2ab}{a+b}.$$

Relația (2) care se verifică imediat, ne arată că media geometrică a două numere a și b este în același timp media geometrică între media aritmetică și media armonică a acelor numere.
Pentru (3), se constată din figura 16 că[5]:

[4] Este un procedeu de calcul care se poate repeta de ori cîte ori, obținînd pe $\sqrt{a}$ cu orice aproximație dorim.

[5] dacă $a=b$, $FD=CF=OD=OE=a$.

$$FD \leqslant DC \leqslant OD. \qquad (4)$$

Cum $$OD = OB = (AC + CB) : 2 = (a + b) : 2 = m_a,$$

$$DC^2 = AC \cdot CB = a \cdot b \Rightarrow DC = \sqrt{a \cdot b} = m_g,$$

$$FD = DC^2 : OD = m_g^2 : m_a = m_h,$$

relaţia (4) devine: $m_h \leqslant m_g \leqslant m_a$ (c.c.t.d.).

Folosind relaţia (3) pentru $a=2$, $b=1$, se obţine:

$$4:3 < \sqrt{2} < 3:2.$$

Considerînd acum $a=3:2$ şi $b=4:3$, aceeaşi relaţie ne dă:

$$24:17 < \sqrt{2} < 17:12.$$

Repetînd procedeul pentru $a=17:12$; $b=24:17$ se va găsi:

$$817:577 < \sqrt{2} < 577:408.$$

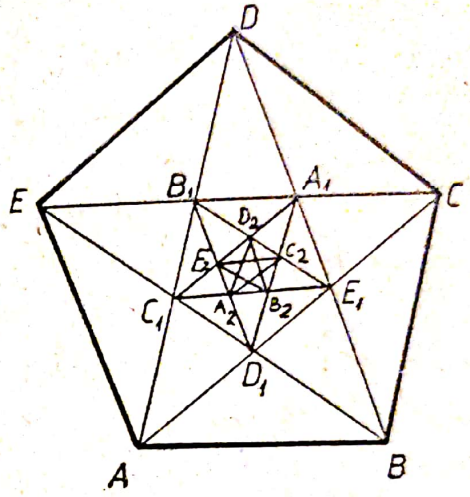


Fig. 17

După 3 paşi se obţine şirul de inegalităţi:

$$1{,}(3) < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$1{,}4117 < \sqrt{2} < 1{,}41(6)$$

$$1{,}414211 < \sqrt{2} < 1{,}414215,$$

care ne dă pentru $\sqrt{2}$ o valoare exactă pînă la a 6-a zecimală.

Folosind aceste procedee, se constată că $\sqrt{2}$ se poate obţine cu orice aproximaţie dorim. Să observăm că ultimul procedeu, (c), ne dă după numai 3 paşi o valoare a lui $\sqrt{2}$ cu aproximaţie de 2/1000000, în timp ce primul, (a), ne dă după 6 paşi (calculînd suma primilor 6 termeni) o aproximaţie de numai 1/100. Eficienţa ultimului procedeu este evidentă.

Un alt număr iraţional apare în expresia raportului dintre diagonala unui *pentagon* regulat şi latura sa. Se presupune că această descoperire a fost făcută tot în şcoala lui Pitagora, de către pitagoreicul Hippasos din Metapont. O justificare geometrică, ce ne arată că diagonala unui pentagon regulat este incomensurabilă cu latura sa, se poate urmări pe figura 17. Construind toate diagonalele pentagonului regulat $ABCDE$ se obţine un pentagon stelat (o pentagramă), care la rîndul lui determină un nou pentagon regulat $A_1B_1C_1D_1E_1$. Un procedeu analog ne conduce la pentagonul regulat $A_2B_2C_2D_2E_2$. După n paşi se obţin n pentagoane regulate $A_iB_iC_iD_iE_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, fiecare determinînd cîte o pentagramă şi procesul se continuă pînă la infinit.

Ne propunem să măsurăm diagonala AC cu ajutorul laturii $DE \parallel AC$. Se constată că $CD_1 = DE$, deoarece patrulaterul $CDED_1$ este un paralelogram. Latura DE este cuprinsă în AC o singură dată şi mai rămîne ca rest segmentul AD_1. Dacă vom măsura acum segmentul AE_1 cu restul AD_1, se obţine acelaşi rezultat şi anume, AD_1 se cuprinde o singură dată în AE_1 şi rămîne ca rest segmentul E_1D_1. Dar E_1D_1 este latura pentagonului înscris

$A_1B_1C_1D_1E_1$ (determinat de laturile pentagramei), iar diagonala acestuia, $A_1C_1 = D_1A$ (deoarece patrulaterul $AD_1A_1C_1$ este un paralelogram). Se obține astfel șirul infinit de rapoarte egale:

$$\frac{AC}{DE} = \frac{A_1C_1}{D_1E_1} = \frac{A_2C_2}{D_2E_2} = \ldots = \frac{A_nC_n}{D_nE_n} = \ldots$$

Rezultă că raportul dintre diagonala pentagonului regulat și latura sa este un număr irațional.

Dacă raportul $AC : DE$ ar fi un număr rațional, procesul ar trebui să se termine după un număr finit de pași (să nu mai apară nici un rest). Ori, în exemplul dat, reapar aceleași rapoarte de o infinitate de ori. Pentru a calcula aceste rapoarte vom folosi expresiile cunoscute pentru latura și diagonala unui pentagon regulat înscris în cercul de rază R:

$$AC = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad DE = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \frac{AC}{DE} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Numărul $\varphi = (1+\sqrt{5}) : 2$, apare și la împărțirea unui segment dat în medie și extremă rație, realizînd așa-numita *secțiune de aur*, precum și în alte probleme ce au fost studiate în școala pitagoreică.

Pentagonul stelat a căpătat în școala lui Pitagora o importanță deosebită, fiind ales ca semn de unire pentru toți pitagoreicii.

Denumirea de mărime incomensurabilă se exprimă în limba greacă prin unul din următorii termeni:

— **Asimmetron**, mărimi care nu au o măsură comună;

— **Arreton**, mărimi *inexprimabile prin numere întregi;*

— **Alogon**, sau ceea ce nu se poate exprima prin logos ca raport a două numere întregi.

Denumirea de *număr irațional*, folosită astăzi în mod curent în matematici, este traducerea în limba latină a cuvîntului alogon (ratio-logon=raport; iratio=alogon=nu poate fi raport a două num re întregi).

Pentru P.H. Michel [32] apariția numerelor iraționale reprezintă „o prăpastie peste care nici calculul, nici logica nu sînt în stare să arunce o punte". Abel Rey [40] susține că „existența numărului irațional $\sqrt{2}$, a fost privită mult timp ca o excepție scandaloasă, ținută ascuns pentru a nu fi răspîndită". Pentru Aristotel însă, descoperirea numerelor iraționale „a provocat doar mirarea pe care o produce orice descoperire științifică adevărată".

Învățătură susținută cu atîta convingere de Pitagora și școala sa, care sprijină întreaga existență a lucrurilor pe numerele întregi, nu mai putea fi recunoscută ca adevărată.

„Faptul[6] merită semnalat, căci descoperirea acestor mărimi a dezlănțuit una din cele mai grave crize din istoria matematicelor, *scandalul mărimilor iraționale*".

„Criza civilizației științifice grecești[7] a fost imposibilitatea de a concepe numărul irațional. Nu cucerirea romană, ci infirmitatea lor de a depăși anumite prejudecăți privitoare la rigoarea matematică, de a accepta și alte moduri de existență matematică, istovește curînd geniul grec".

[6] Florica T. Cîmpan [11].
[7] Ion Barbu [2].

„Un mare șoc[8] al conștiinței științifice din trecutul mai bine cunoscut al omenirii a fost, fără îndoială, acela al lui Pitagora și al discipolilor săi, cînd au constatat că numerele întregi cu care ei construiau cunoștințele despre univers, principiile pînă la ei, ale acestui univers, nu pot reprezenta lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic ale cărui catete au lungimea egală cu unitatea. Același obiect care, în gîndirea pitagoreică servise pentru a da primul model de raționament matematic, cel pe care s-a clădit geometria, cînd a fost vorba de a căpăta o expresie numerică a eșuat, constituind o problemă deschisă pentru ostenelile posterității. Iar aceste osteneli n-au fost mici, obligate fiind de conștiința mereu prezentă, de-a lungul secolelor, de a împăca numărul cu măsura mărimii corespunzătoare".

*

După cum susține Proclus, Pitagora ar fi primul care a ridicat matematica la rangul unei învățături libere. Această știință a fost cultivată ca un scop în sine, nu pentru a obține un profit sau ca divertisment. Atît Pitagora cît și discipolii lui au fost primii care au văzut în matematică o cunoaștere pură, deoarece toate informațiile de care dispunem cu privire la primii matematicieni greci sînt legate aproape în totalitatea lor de probleme aplicative. Vom da numai două exemple: Tales a prezis o eclipsă solară, a determinat înălțimea piramidelor, precum și depărtarea unei corăbii pe mare, plecînd de la unele observații efectuate pe mal. Anaximandru a instalat în Sparta instrumente astronomice, a construit un glob stelar și a întocmit o hartă a Pămîntului. Rezultatele teoretice obținute de Pitagora sau atribuite discipolilor lui, expuse de noi, sînt desigur incomplete. Important este faptul că toate aceste rezultate au fost fructuoase, au constituit un impuls pentru cercetări ulterioare, o parte din ele găsindu-și mult mai tîrziu aplicații în cele mai diferite activități practice.

Ne vom referi în continuare la cele cîteva concepte din matematici, atribuite pitagoreicilor și despre care am amintit în prefața acestei lucrări.

Conceptul de unghi. În matematica preelenică nu se cunoștea decît noțiunea de înclinație sau pantă. Această definiție corespunde noțiunii de cotangentă a unghiului de înclinație față de o dreaptă orizontală.

Conceptul de proporție. În matematica practicată în Babilon, exista o expresie pentru raportul (sau cîtul) a două mărimi numerice de același fel (măsurate cu aceeași unitate de măsură), dar nu exista conceptul de egalitate a rapoartelor, adică noțiunea de proporție.

Folosirea demonstrației. Se citează în mod frecvent, și pe drept, faptul că matematica greacă timpurie a fost prima care a introdus demonstrarea teoremelor enunțate.

Babilonienii au dispus de o algebră foarte dezvoltată, precum și de o geometrie care era suficientă scopurilor lor. În privința aceasta, egiptenii rămîn în urma lor. Se pune în mod firesc întrebarea, cum au reușit ei să obțină rezultate în aceste discipline, fără demonstrație?

Algebra premergătoare grecilor nu este în fond decît calcul. Stilul literar al *textelor de exerciții* ale matematicii babiloniene coincide, aproape în între-

[8] O. Onicescu [37].

Scanned with OKEN Scanner

gime, cu modul de expunere al cărților noastre actuale de aritmetică. Ele conțin culegeri de exerciții și probleme. În această literatură matematică — de tip oriental — extinsă în Babilon, Sumer și Egipt, nu se demonstrează niciodată nimic. În cazuri rare se execută cîte o verificare pe un exemplu. La aceeași concluzie se ajunge dacă se consideră și matematica indiană, precum și cea din răsăritul îndepărtat; ele nu conțin demonstrații.

Conceptul de infinit de asemenea, nu apare deloc. El nu a ajuns să constituie vreodată o problemă la popoarele amintite. Nici o aplicație explicită a infinitului, măcar sub forma simplă a inducției complete — raționamentul care ne permite să trecem de la n la $n+1$.

Dată fiind importanța acestui concept, care prezintă un interes deosebit în matematici, ne propunem să arătăm modul în care a fost introdus în știința greacă timpurie.

Se știe că infinitul a apărut întîi în forma unor procese nesfîrșite și convergente.

Prezența unor asemenea procese apare pentru prima dată la Zenon din Elea (sec. 5 î.e.n.), elevul lui Parmenide. Zenon nu a fost matematician dar a folosit fapte și raționamente cu caracter evident matematic, fapte stabilite încă înaintea lui, de matematicienii școlii pitagoreice.

Procedeul folosit de Zenon, cunoscut sub numele de *Dihotemie* este următorul: un segment AB este împărțit în două părți egale de un punct C_1. Segmentul C_1B este din nou înjumătățit de punctul C_2 și așa mai departe de o infinitate de ori. Vom putea scrie relația: $AC_1+C_1C_2+C_2C_3+\ldots+C_nC_{n+1}+\ldots$ pînă la infinit $=AB$.

Dacă notăm $AB=1$, se obține seria:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1.$$

În această expresie apare *miracolul paradoxal al seriei infinit convergente*.

Pe de o parte, seria $1/2+1/4+1/8+\ldots$ crește fără întrerupere strict monoton și anume, de fiecare dată se adaugă cîte un termen care, chiar dacă este mai mic decît cel precedent, se află totuși față de primul termen 1/2, într-un raport finit (de exemplu 1/16 este 1/8 din 1/2).

Pe de altă parte, seria obținută nu depășește orice limită, deoarece, oricît de mare ar fi numărul termenilor, valoarea ei rămîne inferioară lui 1. Numai în cazul în care numărul termenilor este infinit, suma seriei va fi egală cu 1.

Alternativa *„pe de o parte — pe de altă parte"* ce apare în acest mod, are pentru gîndirea naivă, un aspect paradoxal, deși ea nu conține nici o contradicție logică. Pentru că, dacă ne gîndim mai bine, este posibil ca un număr să crească neîntrerupt, strict monoton, fără ca totuși să depășească o anumită limită dată. Desigur, pentru ca să fie așa, este necesar ca rația creșterii să se micșoreze de fiecare dată în mod corespunzător — adică să descrească suficient de repede. Să observăm totuși că descreșterea rației pînă sub valoarea unei mărimi arbitrar de mici nu este însă suficientă pentru a asigura convergența. Vom da ca exemplu *seria armonică*.

S-ar putea crede că motivul principal al convergenței ar trebui căutat în descreșterea nelimitată a rației, care devine pînă la urmă mai mică decît orice mărime arbitrară. Divergența *seriei armonice*, demonstrează însă falsitatea acestei presupuneri.

Scanned with OKEN Scanner

Termenul general al seriei armonice care este $1/n$ tinde către zero cînd numărul termenilor tinde la infinit; ($\lim 1/n \to 0$, dacă $n \to \infty$) şi totuşi seria armonică $S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots =$ $= \lim n/2 = \infty$, $(n \to \infty)$, este divergentă. Suma ei creşte peste orice limită.

Intelectul rămîne însă la gîndirea pur calitativă, care în cazul de faţă se manifestă prin părerea că dacă ceva creşte mereu şi mereu neîncetat — oricît de mică ar fi această creştere — atunci odată şi odată va trebui să depăşească această limită. Posibilitatea opusă, demonstrată de Zenon în *Dihotomie* pe un exemplu concret, trebuia să apară însă ca un paradox.

Dihotomia şi toate argumentele analoge, diferă de toate celelalte raţionamente finite în mod principial prin aceea că ele reprezintă un proces infinit: descompunerea unui *segment finit* în părţi, al căror număr creşte indefinit, peste orice limită.

Astăzi, nu mai există nici o îndoială că infinitul, concept de o importanţă fundamentală în matematici, a apărut la vechii greci şi era folosit în şcoala pitagoreică. Profunzimea înţelegerii filozofice a marii probleme a infinitului rezultă, înainte de toate, din analiza acestui concept realizată de Aristotel, considerată şi astăzi drept clasică.

În domeniul mărimilor din ce în ce mai mari, obţinute prin procesul adăugirilor, al compunerii permanente, se obţine *infinitul mare:* orice segment de dreaptă poate fi prelungit de ambele părţi nelimitat. De asemenea, oricărui număr n oricît de mare ar fi, i se poate adăuga o unitate şi devine $n+1$, care evident este mai mare decît n. Cum această operaţie se poate continua fără sfîrşit, ne putem da seama într-o oarecare măsură de existenţa şi modul de a obţine numere infinit de mari.

În mod analog, într-un anumit sens există un infinit în mic, în domeniul diviziunii.

Un segment dat poate fi împărţit fără sfîrşit, de exemplu în părţi egale, fără ca această împărţire să se termine vreodată. Deoarece un segment de dreaptă oricît de mic ar fi, el poate fi din nou împărţit în două părţi egale.

După concepţia actuală un segment de dreaptă constituie o mulţime de puncte actual infinită.

Punctele sînt astfel date împreună cu segmentul, ele există deci efectiv în acest segment, iar diviziunea nu face decît să le identifice cu scopul de a le supune unor consideraţii.

Scanned with OKEN Scanner

II. *Demonstrații ale teoremei lui Pitagora*

1. Se presupune că una din demonstrațiile acestei teoreme este atribuită lui Pitagora și se bazează pe teoria proporțiilor (fig. 18).

$$\triangle ADC \sim \triangle ABC;\ (\widehat{ADC}=\widehat{BAC}=90^\circ,\ \widehat{ACD}=\widehat{ACB});$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AC}\Leftrightarrow AC^2=BC\times CD. \tag{1}$$

$$\triangle ABD \sim \triangle ABC;\ (\widehat{ADB}=\widehat{BAC}=90^\circ,\ \widehat{ABC}=\widehat{ABD}).$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DB}{AB}\Leftrightarrow AB^2=BC\times DB. \tag{2}$$

Din (1) și (2) prin adunare se obține:

$$AB^2+AC^2=BC\times DB+BC\times CD=BC(DB+CD)=$$
$$=BC\times BC=BC^2$$

$$\boxed{BC^2=AB^2+AC^2}\ \text{(c.c.t.d.)}$$

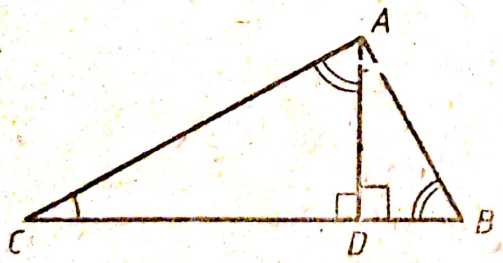


Fig. 18

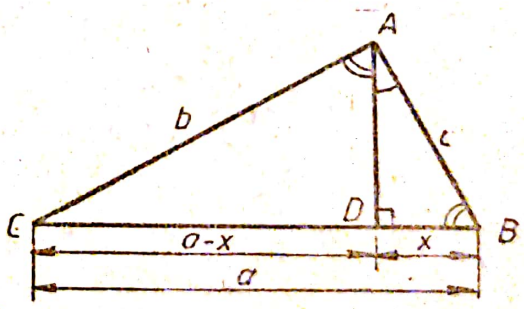


Fig. 19

2. O demonstrație bazată tot pe teoria proporțiilor este dată în lucrarea „Ingeniozitate și surpriză în matematică" [23] (fig. 19).

$$\triangle ABC \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{x}{c}=\frac{c}{a}\Rightarrow c^2=ax, \tag{3}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{a-x}{b}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow b^2=a^2-ax. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se adună relațiile (3) și (4):

$$\boxed{b^2+c^2=a^2} \text{ (c.c.t.d.).}$$

3. Demonstrația dată de Euclid în cartea I-a, teorema 47 din ELEMENTE, bazată pe echivalență de arii (fig. 20).

$$\text{aria } ABE=\frac{1}{2}BE\times BN=\frac{1}{2}\text{ aria } BEMN,$$

$$\text{aria } BCI=\frac{1}{2}\cdot BI\times AB=$$

$$=\frac{1}{2}\text{ aria } AHIB.$$

Cum $\Delta ABE=\Delta BCI$; ($BC=BE$; $AB=BI$; $\widehat{ABE}=\widehat{IBC}=90°+\widehat{ABC}$)

$$\text{aria } BEMN=\text{aria } AHIB. \quad (5)$$

$$\text{aria } ACD=\frac{1}{2}CD\times CN=$$

$$=\frac{1}{2}\text{ aria } CDMN$$

$$\text{aria } BCF=\frac{1}{2}CF\times CA=$$

$$=\frac{1}{2}\text{ aria } CFGA.$$

Cum $\Delta BCF=\Delta ACD$; ($AC=CF$; $BC=CD$; $\widehat{BCF}=\widehat{ACD}=90°+\widehat{ACB}$),

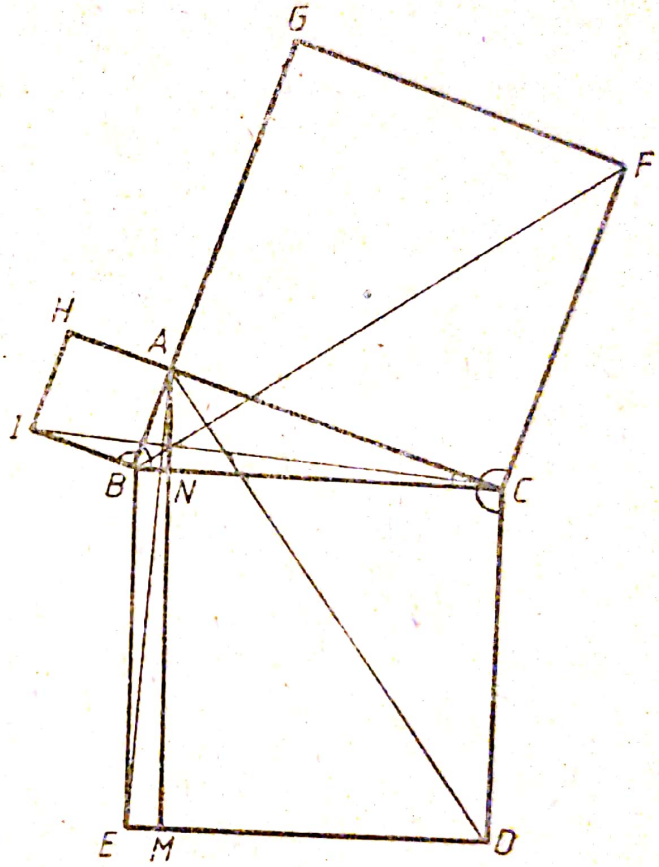


Fig. 20

$$\text{aria } CDMN=\text{aria CFGA}. \quad (6)$$

Adunînd relațiile (5) și (6) obținem:

$$\text{aria } (AHIB+CFGA)=\text{aria } (BEMN+CDMN)=\text{aria } BCDE.$$

$$\boxed{AB^2+AC^2=BC^2} \text{ (c.c.t.d.).}$$

4. Demonstrație dată de Bhaskara Aciarya (1114–1178) în cartea lui Ciu-Pei-Suan (fig. 21).

Se consideră două pătrate egale $ABCD$ și $A'B'C'D'$, de latură $AB=A'B'=b+c$.

Primul pătrat se descompune în:
— două dreptunghiuri egale de arie $b \cdot c$;
— două pătrate de arii b^2 și c^2;
Al doilea pătrat se descompune în:
— patru triunghiuri dreptunghice de arie $\frac{bc}{2}$,
— un pătrat de arie a^2 construit pe ipotenuza triunghiului dreptunghic de catete b și c.

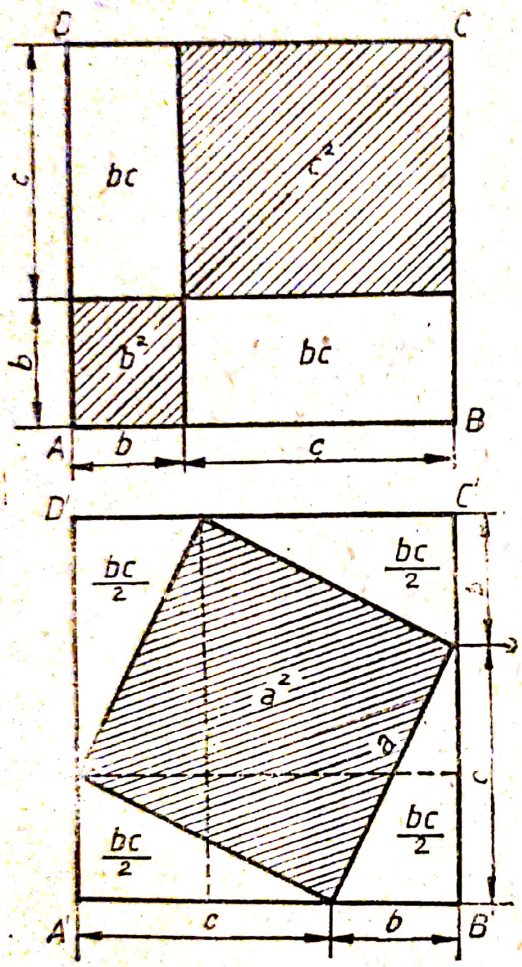


Fig. 21

Cum cele două pătrate au laturile egale, ariile lor sînt egale; aria $ABCD$ = aria $A'B'C'D'$.

$$b^2+c^2+2bc=a^2+4\cdot\frac{bc}{2};$$

$$\boxed{b^2+c^2=a^2} \text{ (c.c.t.d.)}$$

5. O demonstrație folosind metoda acoperirii cu figuri identice, atribuită lui Leonardo Pisano[9] (1220) (fig. 22).

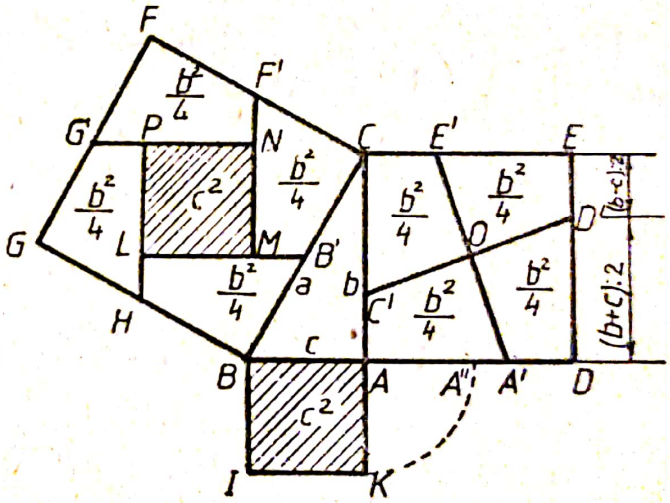


Fig. 22

Construim segmentele $AA'=DD'=EE'=CC'=\frac{b+c}{2}$.

Rezultă $A'D=D'E=E'C=C'A=b-\frac{b+c}{2}=\frac{b-c}{2}$. Ducem apoi dreptele $A'E'$ și $C'D'$ ($AA''=c$; $A''D=AD-AA''=b-c$; $A'D=A''D:2=(b-c):2$). $GH=HB=BB'=B'C=CF'=F'F=F'G'=G'G=a:2$ și $PH \parallel F'M \parallel AC$; $B'L \parallel G'N \parallel AB$. Se obține: $LM=MN=NP=PL=(b+c):2-(b-c):2=c$ și deci aria $(LMNP)=c^2$.

[9] Leonardo da Pisa (Fibonaci) — (1180—1250). A introdus șirul numerelor: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,..., u_{n-1}, u_n, u_{n+1},..., ce poartă numele de șirul lui Fibonaci. Termenii acestui șir se obțin din relația de recurență: $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Putem scrie relația:

$$a^2=4\cdot\frac{b^2}{4}+c^2=b^2+c^2.$$

$$\boxed{BC^2=AC^2+AB^2} \text{ (c.c.t.d.)}$$

6. Demonstrație dată de Leonardo da Vinci (1452–1519)

Construim pătratul $BCDE$ (fig. 23) pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic $ABC(AB=c,\ AC=b,\ BC=a)$, apoi ducem $DB'\perp AC$; $EC'\perp DB'$ și $AA'\perp EC'$. Pătratul $BCDE$ construit pe ipotenuza BC se descompune astfel în patru triunghiuri egale cu triunghiul dat ABC de catete b, c și în pătratul $AB'C'A'$ de latură $AB'=AC-B'C=b-c$.

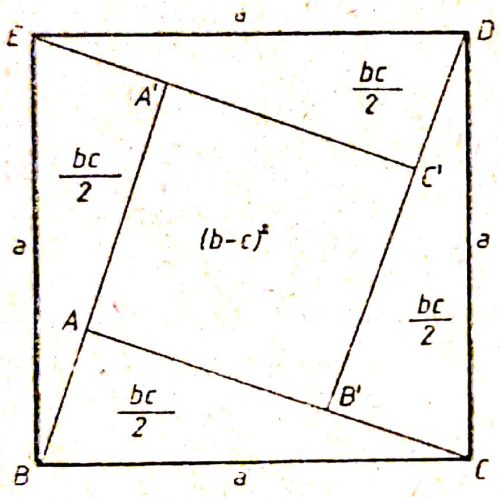


Fig. 23

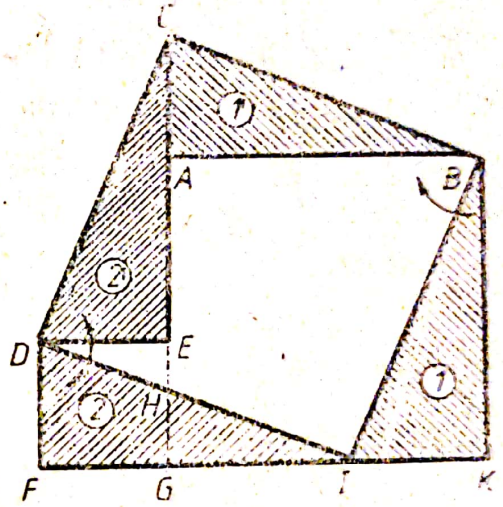


Fig. 24

$$\text{aria } AB'C'A'=AB'^2=(b-c)^2$$

$$\text{aria } ABC=\text{aria } CDB'=\text{aria } DC'E=\text{aria } EA'B=\frac{bc}{2}$$

$$\text{aria } BCDE=\text{aria } AB'C'A'+4 \text{ aria } ABC.$$

$$a^2=(b-c)^2+4\cdot\frac{bc}{2}=b^2-2bc+c^2+2bc$$

$$\boxed{a^2=b^2+c^2} \text{ (c.c.t.d.).}$$

7. O demonstrație prin tapetare folosind rotația a două triunghiuri (fig. 24).

Ducem $DE\perp CG$; $DF\parallel CG$ și $KF\parallel AB$. Din construcție rezultă egalitatea următoarelor triunghiuri:

$$1=1';\ 2=2'.$$

1 se va suprapune peste 1' după o rotație de 90° în jurul lui B.
2 va acoperi pe 2' după o rotație de 90° în jurul lui D.

Scanned with OKEN Scanner

În acest mod, pătratul $BCDI$ construit pe ipotenuza BC, a fost acoperit de pătratele $ABKG$ (construit pe cateta AB) și $DFEG$ de la tură DE (construit pe cateta $DE=AC$) folosind numai două rotații (marcate prin săgeți).

$$\boxed{BC^2=AC^2+AB^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}$$

Egalitatea triunghiurilor menționate se justifică astfel:

$1=1'$, fiind triunghiuri dreptunghice ($\widehat{BKI}=\widehat{BAC}=90°$); $\widehat{ABC}=\widehat{KBI}$ având laturile perpendiculare și îndreptate în același sens ($AB\perp KB$ și $CB\perp IB$), și $BI=BC$ ca laturi în pătratul $BCDI$.

$2=2'$, fiind triunghiuri dreptunghice având $\widehat{DEC}=\widehat{DFI}=90°$ prin construcție; $\widehat{CDE}=\widehat{FDI}$ fiind cu laturile perpendiculare și îndreptate în același sens ($CD\perp DI$, $DE\perp DF$), și $DI=DC$ ca laturi în pătratul $BCDI$.

8. O demonstrație prin tapetare cu 5 figuri distincte (fig. 25).

Se duc dreptele $BH\perp BC$; $CE\perp BC$; $QK\parallel AB$; $GE\parallel BC$; $PQ=GE$; $BL\parallel PN\parallel RM\parallel AC$. Pătratul construit pe ipotenuza BC se descompune în 5 figuri distincte numerotate $1', 2', \ldots, 5'$. Pătratele construite pe catetele AC și AB se descompun în figurile 1, 2, 3 respectiv 4, 5.

Din construcție se constată că figurile:

$1=1'$; $2=2'$; $3=3'$; $4=4'$; $5=5'$

Deci, pătratul construit pe ipotenuza BC a fost acoperit prin tapetare cu 5 figuri distincte, decupate din pătratele construite pe cele două catete AB și AC.

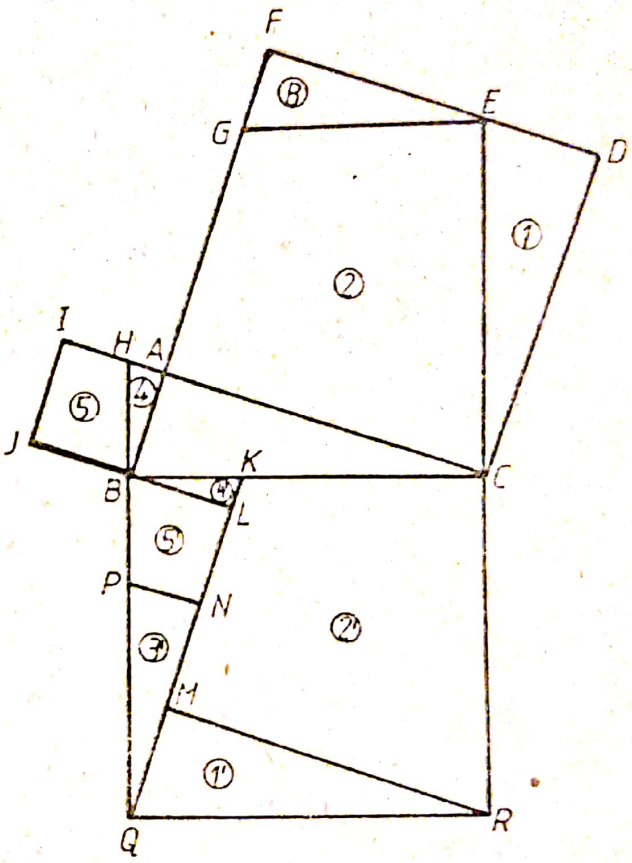


Fig. 25

$$\boxed{BC^2=AB^2+AC^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}$$

Observație. Figurile n și n' ($n=1, 2, \ldots, 5$), egale două cîte două se pot suprapune astfel:

1 peste $1'$ printr-o *translație* CR și o *rotație* de 90° în jurul lui R,
2 peste $2'$ printr-o *translație* CR,
3 peste $3'$ prin *două translații* succesive GB și BP, urmate de o rotație de 90° în jurul lui P,
4 peste $4'$ printr-o *rotație* de 90° în jurul lui B,
5 peste $5'$ printr-o *rotație* de 180° în jurul lui B.

Scanned with OKEN Scanner

Pătratul construit pe ipotenuza BC a fost acoperit de pătratele construite pe cele două catete AB și AC, prin decuparea lor în 10 figuri distincte care se suprapun două cîte două, folosind *4 rotații și 4 translații*.

9. O demonstrație dată de Ion Ionescu în Gazeta Matematică din 1895 [22].

Aria $BCDEFG=S$ se descompune în două moduri diferite (fig. 26):

$$S=S_a+(BGF)+(FHE)+(CDH); \tag{7}$$

$$S=S_b+S_c+(AEI)+(EFI)+(ABC). \tag{8}$$

Se constată apoi egalitățile triunghiurilor:

$$(BGF)=(AEI);\ (EFH)=(EFI);$$

$$(CDH)=(ABC); \tag{9}$$

Din (7) și (8) rezultă:

$$S_a=S_b+S_c,$$

$$\boxed{a^2=b^2+c^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

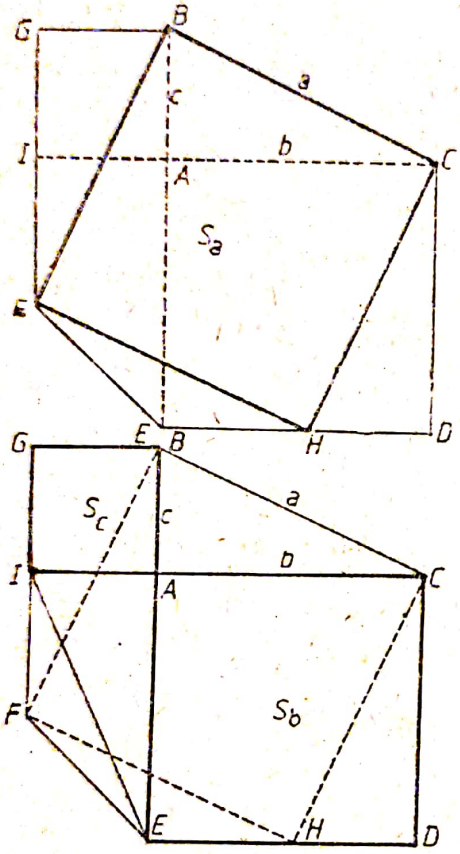


Fig. 26

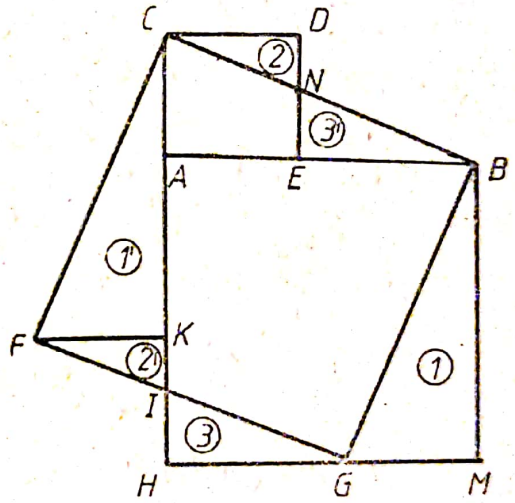


Fig. 27

Egalitatea triunghiurilor menționate în (9) se justifică astfel:

$\Delta BGF=\Delta AEI$, avînd $BG=AL$, $GF=AE$, $BF=EI$.

$\triangle EFH=\triangle EFI$, avînd $EF=EF$; $EH=FI(EH=ED-HD=b-c)$;

$FI=FG-GI=b-c$ și $FH=EI=BC=a$.

$\triangle CDH=\triangle ABC$ avînd $HC=BC$, $DC=AC$, $\hat{D}=\hat{A}=90°$.

10. O demonstrație prin tapetare folosind trei translații, dată de A. Ilovici în Gazeta Matematică 1895 (fig. 27).

Ducem $KF\perp AH$. Din construcție se constată că avem următoarele egalități de triunghiuri:

$1=1'$; $2=2'$; $3=3'$

care se suprapun astfel:

1 peste $1'$ după o translație BC,
2 peste $2'$ după o translație CF,
3 peste $3'$ după o translație BG.

În acest mod, pătratul construit pe ipotenuza BC a fost acoperit prin tapetare de pătratele construite pe cele două catete AB și AC, după trei translații.

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Egalitatea triunghiurilor de mai sus se justifică astfel:

$1=1'$, având $\widehat{GMB}=\widehat{FKC}=90°$ ($FK \perp AH$), $\widehat{MBG}=\widehat{FCK}$, cu laturile paralele: $BM \parallel CK$, $BG \parallel CF$ și $BG=CF$ ca laturi în pătratul $BCFG$.

$2=2'$, având $\widehat{CDN}=\widehat{FKI}=90°$ ($FK \perp AH$), $\widehat{DCN}=\widehat{KFI}$, cu laturile paralele $CD \parallel FK$, $CN \parallel FI$ și $CD=FK=AC$ ca laturi în pătratul $ACDE$.

$3=3'$, având $\widehat{NEB}=\widehat{IHG}=90°$;

$\widehat{NBE}=\widehat{IGH}$, cu laturile paralele: $NB \parallel IG$, $BE \parallel GH$ și $BE=HG$ ($BE=AB-AE$ și $HG=HM-GM=AB-AE$).

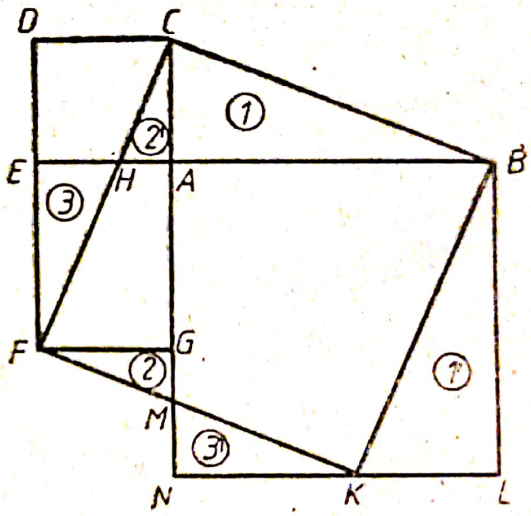


Fig. 28

11. O variantă a demonstrației 10, folosind deplasarea a 4 triunghiuri (fig. 28).

Unim pe E cu F și ducem $FG \perp AN$.

Din construcție se constată următoarele egalități de triunghiuri:

$1'$ va coincide cu 1 după o rotație de 90° în jurul lui B;

$2'$ va coincide cu 2 după o translație AG și o rotație de 90° în jurul lui G;

$3'$ va coincide cu 3 după o translație KF și o rotație de 90° în jurul lui F; iar $\triangle DCF$ se va suprapune peste $\triangle CFG$.

În acest mod, pătratul construit pe ipotenuza BC a fost acoperit de pătratele construite pe cele două catete AB și AC.

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Observații. În această variantă pătratul $ACDE$ a fost construit în exteriorul triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

12. O demonstrație prin metoda tapetării folosind rotația a două triunghiuri, dată de G. G. Longinescu [27] (fig. 29).

Ducem $FN \perp AC$; $FM \parallel AC$; $GE \parallel AC$; $AH \parallel CE$; $CM \perp GK$; $BD \parallel AC$; $DC \parallel AB$; $NK \parallel AH$.

Din construcție rezultă egalitatea triunghiurilor: $1=1'$ și $2=2'$.

1 se va suprapune peste $1'$ după *o rotație* de 90° în jurul vîrfului B;

2 se va suprapune peste $2'$ după *o rotație* de 90° în jurul vîrfului F.

Triunghiul FKL rămîne pe loc fiind comun pătratelor $BCFG$ și $KEMF$ (a cărui latură $KF=AB$).

În acest mod, pătratul construit pe ipotenuza BC a fost acoperit de pătratele construite pe cele două catete AC și AB.

$$\boxed{BC^2 = AC^2 + AB^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

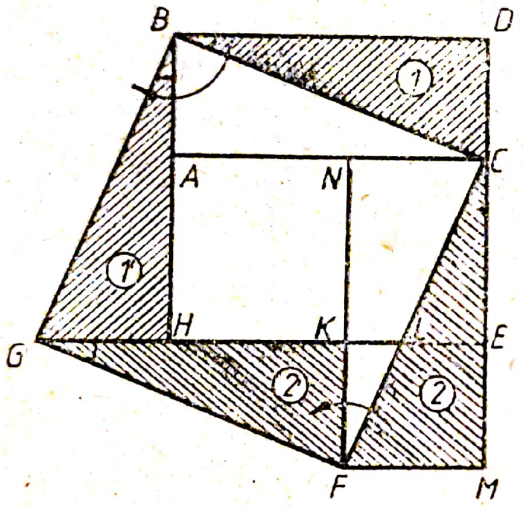


Fig. 29

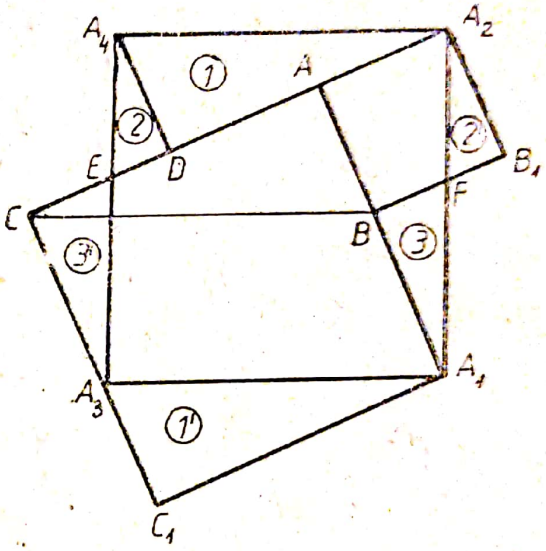


Fig. 30

Observații. Egalitatea triunghiurilor de mai sus se justifică astfel:

$1=1'$ avînd $\widehat{BDC}=\widehat{BHG}=90°$, $\widehat{DBC}=\widehat{GBH}$ cu laturile perpendiculare: $DB \perp BH$ și $CB \perp BG$; $BD=BN$ ca laturi în pătratul $BDEH$.

$2=2'$ avînd $\widehat{FMC}=\widehat{GKF}=90°$, $\widehat{MCF}=\widehat{FGC}$ cu laturile perpendiculare: $CF \perp GF$ și $CM \perp GK$ (prin construcție), $CF=GF$ ca laturi în pătratul $BCFG$.

— Este o variantă a demonstrației 7, în care pătratele construite pe cele două catete AB și AC au fost așezate în mod diferit, dar tapetarea se realizează tot prin rotația a două triunghiuri.

13. O demonstrație prin tapetare folosind translația a trei triunghiuri, dată de V. Thebault [47].

Se construiește pătratul ACC_1A_1 peste triunghiul dat ABC și ABB_1A_2 în afara acestui triunghi (fig. 30).

Se duce $A_1A_3 \parallel BC$. Cum $BA_1 \parallel CA_3$, patrulaterul BCA_3A_1 este paralelogram și deci $A_1A_4=BC$; $BA_1=CA_3$.

Unim A_1 cu A_2 și ducem $A_2A_4 \parallel A_1A_2$; $A_2A_4 \parallel BC$; $A_4D \perp AC$.
Din construcție rezultă egalitatea triunghiurilor:

$$1=1'; \quad 2=2'; \quad 3=3'.$$

Se constată că pătratul $A_1A_2A_3A_4$ de latură $A_1A_3=BC$ a fost acoperit de pătratele ACC_1A și ABB_1A_2 construite pe cele două catete AC și AB:

1′ se suprapune peste 1 după o translație A_1A_2;
2′ va coincide cu 2 printr-o translație A_2A_4;
3′ se va așeza peste 3 după o translație A_3A_1.

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Observații. Patrulaterul AA_1A_3E și trapezul $ABFA_2$ sînt comune pătratului $A_1A_2A_4A_3$. Egalitatea celor trei perechi de triunghiuri se justifică astfel:

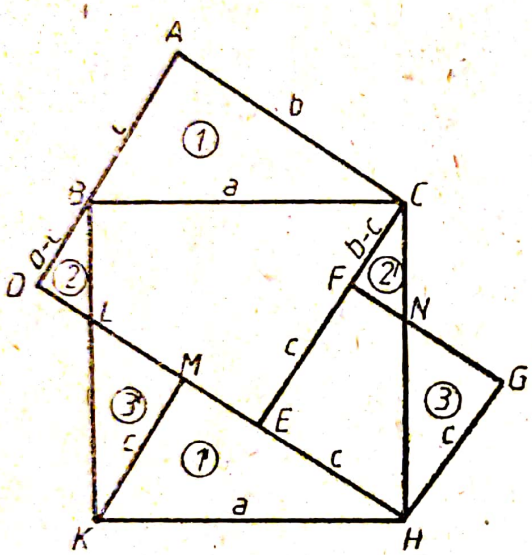


Fig. 31

$1=1'$ avînd laturile paralele, $A_2A_4 \parallel A_1A_3$, $A_2D \parallel A_1C$, $A_4D \parallel A_3C_1$ și $A_1A_3 = A_2A_4$ ca laturi în pătratul $A_1A_2A_4A_3$;

$2=2'$ avînd laturile paralele, $A_4E \parallel A_2F$, $A_4D \parallel A_2B_1$, $ED \parallel B_1F$ și $B_1A_2 = A_4D = AB$.

$3=3'$ avînd laturile paralele, $CE \parallel BF$, $CA_3 \parallel BA_1$, $EA_3 \parallel FA_1$ și $A_1B_1 = A_3C$ ca laturi opuse în paralelogramul BCA_3A_1.

14. O variantă a demonstrației 13 prin tapetare, folosind translația a trei triunghiuri (fig. 31).

Construim pătratul $BCHK$ pe ipotenuza BC, în afara triunghiului dat și pătratul $ACED$ pe cateta AC peste triunghiul dat.
Prelungim DE și construim pătratul $EH=HG=GF=FE=c$. Ducem $KM \perp DE$.
Din construcție rezultă egalitatea următoarelor triunghiuri.:

$$1=1'; \quad 2=2'; \quad 3=3'.$$

1 se va suprapune peste 1′ după o translație CH;
2 se va așeza peste 2′ printr-o translație BC;
3 se va suprapune peste 3′ după o translație HK.
Patrulaterul $BCEL$ și trapezul $FNHE$ rămîn pe loc fiind comune pătratului $BCHK$.

În acest mod, după translația a trei triunghiuri, pătratul $BCHK$ construit pe ipotenuza BC a fost acoperit de pătratele $ACED$ și $FGHE$ construite pe catetele AC și $EH=AB$.

$$\boxed{BC^2 = AC^2 + AB^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Observație. Această variantă se obține din 13, după o rotație a întregii figuri cu 180°, suprimînd ipotenuza BC și înlocuind triunghiul $A_1C_1A_3$ cu ABC.

Scanned with OKEN Scanner

15. O demonstrație prin tapetare, folosind deplasarea a patru figuri distincte, după 3 translații și 4 rotații (fig. 32).

Se construiesc pătratele pe catetele AB și AC în afara triunghiului dat, și pătratul $BCDE$ pe ipotenuza BC peste triunghiul dat. Se duce $DF \perp AA'$ și se unește D cu D'. Din construcție rezultă egalitatea triunghiurilor:

$$1=1';\ 2=2';\ 3=3';\ \triangle BB'D=\triangle BDF$$

1 se suprapune peste 1' *după o rotație* de 90° în jurul lui C;
2 se va așeza peste 2' după *o translație* ED și o rotație de 90° în jurul lui D;
3 trece în locul lui 3' după *o translație* AF și *o rotație* de 90° în jurul lui F, după care triunghiul BDF rămîne descoperit.
$\triangle BDF$ va fi acoperit de $\triangle BB'D$ după *o translație* DB și *o rotație* de 180° în jurul lui B.

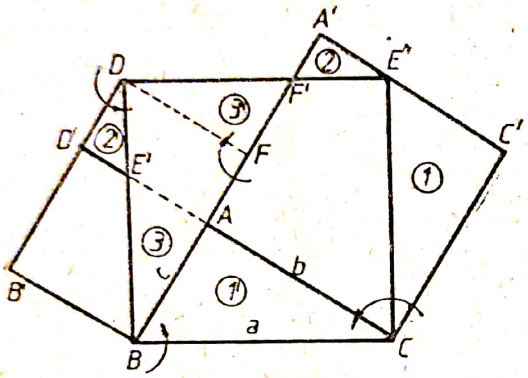


Fig. 32

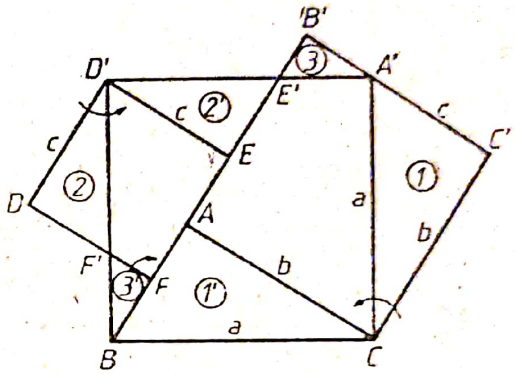


Fig. 33

În acest mod, după deplasarea a patru figuri distincte (folosind 4 rotații și 3 translații), pătratul construit pe ipotenuza BC a fost tapetat cu pătratele construite pe cele două catete AB și AC.

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}\ \text{(c.c.t.d.)}.$$

16. O variantă a demonstrației 15 prin tapetare folosind deplasarea a 3 triunghiuri, după 3 rotații și o translație (fig. 33).

Construim pătratul $AB'C'C$ pe cateta AC în afara triunghiului ABC și pătratul $AD'A'C$ pe ipotenuza BC peste acest triunghi.
Ducem $D'E \perp BE'$, $DD' \parallel AB$ și $DF \perp BF$. Din construcție rezultă egalitatea triunghiurilor:

$$1=1';\ 2=2';\ 3=3',$$

iar patrulaterul $DD'EF$ este un pătrat de latură $D'E=AB$.
Din figură se constată că:
1 se va suprapune peste 1' după o rotație de 90° în jurul lui C;
2 va coincide cu 2' după o rotație de 90° în jurul lui D';
3 se va așeza peste 3' după *o translație* $B'F$ și *o rotație* de 90° în jurul lui F.
Trapezul $EFF'D'$ și patrulaterul $ACA'E$ sînt comune cu pătratul $BCA'D'$ construit pe ipotenuza BC.

Scanned with OKEN Scanner

După deplasările menționate (o translație și 3 rotații), pătratul $BCA'D'$ construit pe ipotenuza BC a fost acoperit de pătratele $ACC'B'$ și $EFDD'$ construite pe cele două catete AC și $AB=D'E$.

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Observație. Deosebirea acestei variante față de demonstrația 15, apare la construcția pătratului pe cateta AB care a fost deplasat printr-o translație $BF=AF$.

Ca o consecință a acestei deosebiri, tapetarea se face numai cu 3 figuri distincte (în loc de 4) și se realizează numai cu 3 rotații și o translație (în loc de 4 rotații și 3 translații).

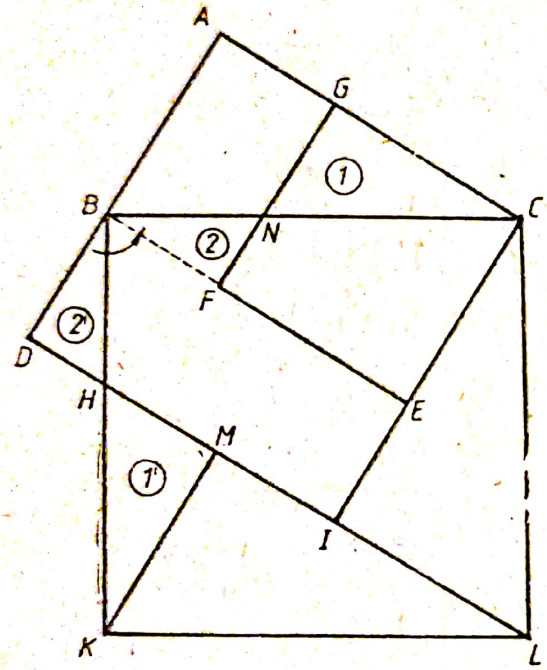


Fig. 34

17. O demonstrație prin tapetare, folosind trei rotații și trei translații (fig. 34).

Construim pătratul $BCLK$ în afara triunghiului dat ABC și pătratul $ADIC$ peste acest triunghi. Construim apoi pătratul $CGEF$ cu laturile $CG=GF=FE=EC=AB$ (egal cu pătratul construit pe cateta AB). Unim B cu F și ducem $KM \perp DI$. Din construcție rezultă egalitatea triunghiurilor:

$$1=1';\ 2=2';\ \triangle ABC=$$

$$=\triangle LMK=\triangle CLI.$$

Procedeul de acoperire a pătratului $BCLK$ este următorul:

1 ce aparține pătratului $CGFE$ se va suprapune peste $1'$ după *o translație* NH și *o rotație* de 90° în jurul lui H.

$2'$ va coincide cu 2 după *o rotație* de 90° în jurul lui B.

$\triangle ABC$ ce aparține pătratului $ACID$ va acoperi $\triangle KLM$ după o *translație* BK (fig. 34).

$\triangle CBE$ format din 2 și trapezul $EFNC$ se va suprapune peste $\triangle CIL$ după *o translație* CL și *o rotație* de 90° în jurul lui L. Trapezul $BEIH$ este comun pătratelor $BCLK$ și $ACID$. În acest mod după 3 *rotații* și 3 *translații*, pătratul $BCLK$ construit pe ipotenuza BC, a fost acoperit de pătratele $ACID$ și $CGFE$ construite pe catetele AC și $AB=CG$.

$$\boxed{BC^2 = AC^2 + AB^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

18. O variantă a demonstrației 17, în care tapetarea se realizează tot prin 3 rotații și 3 translații (fig. 35).

Construim pătratele pe cele două catete AB și AC peste triunghiul dat ABC, iar pătratul $BCHG$ pe ipotenuza BC în afara acestui triunghi. Ducem apoi $GI \perp EF$ și $FH \parallel AC$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum $CF \parallel AE$ și $FH \parallel AC$ prin construcție rezultă $\widehat{CFN}=\widehat{CAE}=90°$ și deci $\triangle FCH=\triangle ABC$ ($\widehat{FCH}=\widehat{ACB}$ având laturile perpendiculare și îndreptate în același sens: $CF \perp CA$ și $CH \perp CB$; iar $CH=CB$ ca laturi în pătratul $BCHG$).

De asemenea se mai constată egalitatea următoarelor triunghiuri:

$$1=1'; \quad 2=2'; \quad \triangle ABC=\triangle GHI=\triangle CFH.$$

Tapetarea se face astfel:

$\triangle ABC$ ce aparține pătratului $ACFE$ se va suprapune peste $\triangle CFH$ după *o rotație* de 90° în jurul vîrfului C.

2 va coincide cu 2′ după *o translație* BG *și o rotație* de 90° în jurul vîrfului G.

1 se va așeza peste 1′ după *o translație* BC și *o rotație* de 90° în jurul vîrfului C în sensul invers celui indicat de săgeată.

$\triangle ABC$ format din trapezul $ABMN$ (ce aparține pătratului $ANDB$) și triunghiul 1′ se va suprapune peste $\triangle GHI$ după *o translație* BG. Poligonul $BDMCFK$ rămîne pe loc fiind comun pătratelor $BCHG$ și $ACFE$.

Astfel, după deplasarea a 4 triunghiuri, folosind 3 rotații și 3 translații, pătratul $BCHG$ construit pe ipotenuza BC a fost acoperit de pătratele $ACFE$ și $ABDN$ construite pe cele două catete AC și AB.

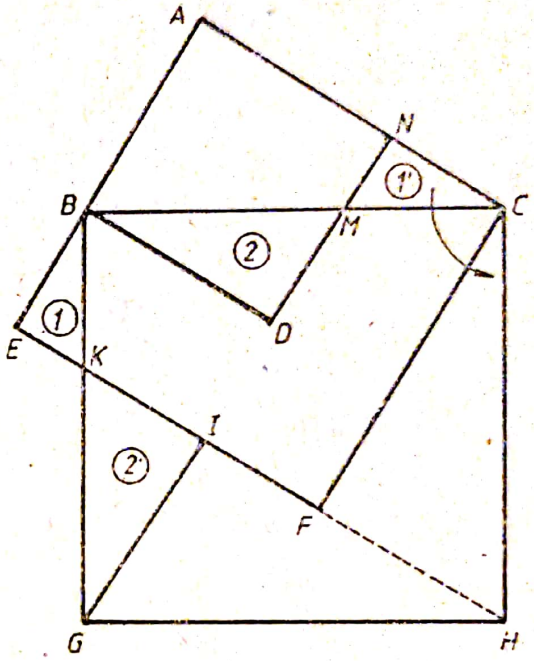


Fig. 35

$$\boxed{BC^2=AB^2+AC^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Observație. Această variantă se deosebește de 17 prin modul în care a fost construit pătratul pe cateta AB. Construcția celorlalte două pătrate, pe ipotenuză și pe cateta AC a rămas aceeași.

19. O demonstrație cu ajutorul funcțiilor trigonometrice (fig. 36).

În cercul cu centrul O și raza $R=OA=OB$ se duc:

$$AD \parallel BC; \quad AD \perp OD; \quad BC \perp OD; \quad BE \perp OA.$$

Patrulaterul $OBAD$ se poate descompune în două moduri diferite:

$$OBA+OAD=OBC+ABCD.$$

Scriem egalitatea ariilor acestor figuri:

$$OA \cdot BE+OD \cdot AD=OC \cdot BC+(AD+BC) \cdot CD. \qquad (10)$$

Cum, $CD=OD-OC$, relația (10) devine:

$$OA \cdot BE+OD \cdot OA=OC \cdot BC+(AD+BC)(OD-OC)$$

$$OA \cdot BE=BC \cdot OD-AD \cdot OC. \qquad (11)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, $OA=R$; $BE=OB\ \sin(b-a)=R\ \sin(b-a)$; $BC=R\sin b$; $OD=R\cos a$; $AD=R\sin a$; $OC=R\cos b$; $a, b<90°$; $a\neq b$, și relația (11) se scrie:

$$\sin(b-a)=\sin b\cos a-\sin a\cos b. \tag{12}$$

Dacă: $b-a=90°$; $b=90°+a$; $\sin(b-a)=\sin 90°=1$;

$\sin b=\sin(90°+a)=\cos a$; $\cos b=\cos(90°+a)=-\sin a$, și (12) devine:

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1. \tag{13}$$

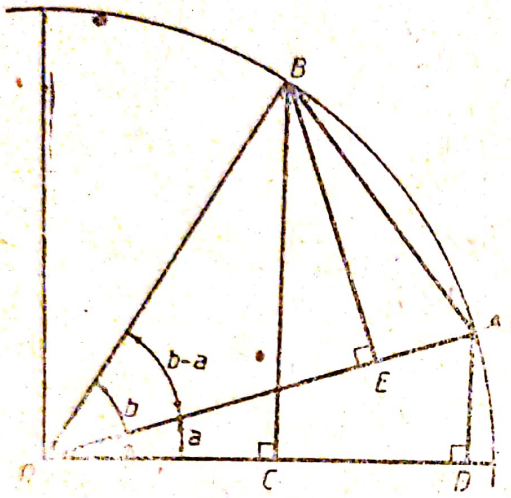


Fig. 36

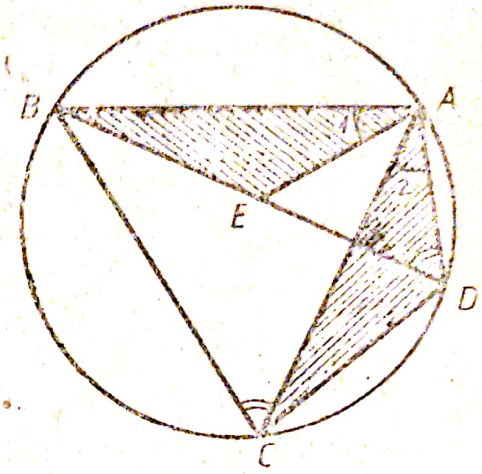


Fig. 37

Am obținut astfel relația fundamentală a trigonometriei fără a folosi teorema lui Pitagora.

Din triunghiul OAD, dreptunghic în D avem prin definiție:

$$AD=OA\ \sin a, \qquad OD=OA\cos a,$$

$$AD^2+OD^2=OA^2(\sin^2 a+\cos^2 a).$$

sau, dacă ținem seama de (13),

$$\boxed{OA^2=AD^2+OA^2} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

20. O demonstrație dedusă din teorema lui Ptolemeu[10].

Ne propunem să arătăm că: într-un patrulater inscriptibil, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse (fig. 37).

Vom da o demonstrație a acestei teoreme folosind teoria proporțiilor.

În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ ducem AE astfel ca $\widehat{BAE}=\widehat{DAC}$. Se deduce succesiv:

$$\triangle BAE\sim\triangle CAD;\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BE}\leftrightarrow AC\cdot BE=AB\cdot CD, \tag{14}$$

[10] Matematician, astronom și geograf grec (cca 85—165)

$$\triangle AED \sim \triangle ABC; \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED} \leftrightarrow AC \cdot ED = AD \cdot BC. \qquad (15)$$

Adunăm relațiile (14) cu (15):

$$AC \cdot BE + AC \cdot ED = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

$$AC(BE + ED) = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \qquad (16)$$

Dacă $AB = CD$; $AD = BC$; $AC = BD$; $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$, triunghiul ABC va fi dreptunghic, iar relația (16) devine:

$$\boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2} \text{ (c.c.t.d.).}$$

21. O demonstrație folosind metoda vectorială (fig. 38).

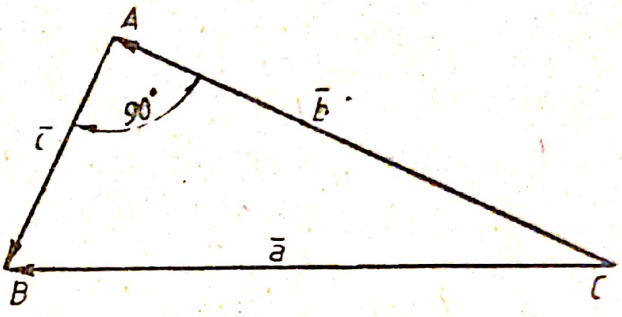


Fig. 38

Considerăm vectorii **AB**, **BC**, **CA** așezați pe laturile triunghiului dreptunghic ABC ($\widehat{A} = 90°$).

Se știe că suma a trei vectori care închid un triunghi este nulă:

$$\mathbf{CA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BC} = 0,$$

$$\mathbf{CA} + \mathbf{AB} - \mathbf{CB} = 0,$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a} = 0,$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}. \qquad (17)$$

Ridicînd la pătrat în ambii membri obținem:

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2,$$

$$\mathbf{b}^2 + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2. \qquad (18)$$

Cum produsul scalar a doi vectori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ este:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cos(\widehat{v_1, v_2}) = v_1 \cdot v_2 \cos(\widehat{v_1, v_2}),$$

relația (18) devine:

$$b \cdot b + 2b \cdot c \cos 90° + c \cdot c = a \cdot a;$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \text{ (c.c.t.d.).}$$

22. O demonstrație prin tapetare cu 10 figuri (4 triunghiuri, un pătrat și 5 trapezuri) (fig. 39).

Pătratul construit pe ipotenuza BC se descompune în 10 figuri, ducînd dreptele: $CD_1 \parallel B_1D_2 \parallel AB$ și $C_1C_4 \parallel BB_4 \parallel AC$. Pătratele construite pe

Scanned with OKEN Scanner

cele două catete se descompun ducînd dreptele $E_1E_2 \parallel G_1G_2 \parallel H_1H_2 \parallel AB$; $F_1F_2 \parallel AC$ și $F_1AA_1 \parallel BC$. Din construcție, figurile notate cu aceeași literă cu și fără accent sînt egale două cîte două:

$$P = P' + F_1A_2B_3;\ Y = Y';\ T = T';\ H = H';\ A = A';\ G = G';$$

$$O = O';\ R = R';\ E = E'.$$

În acest mod, pătratul construit pe ipotenuza BC a fost tapetat cu figurile în care au fost descompuse pătratele construite pe cele două catete AB și AC.

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}\ \text{(c.c.t.d.)}.$$

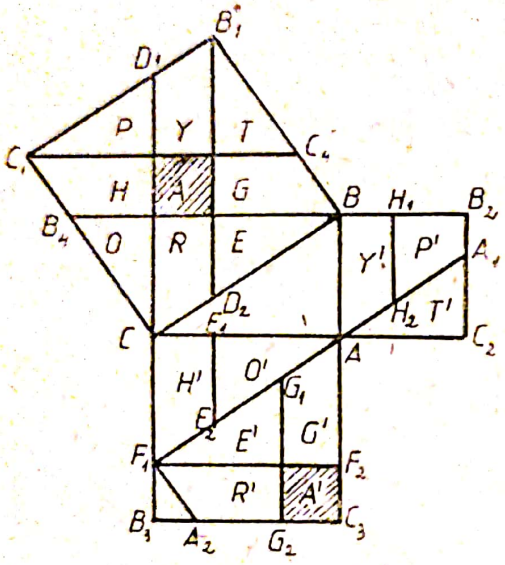


Fig. 39

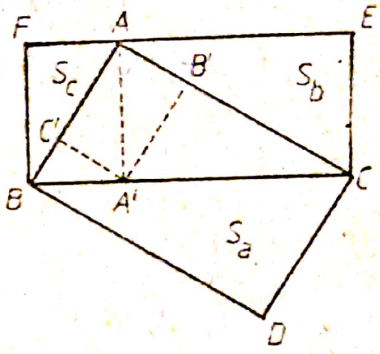


Fig. 40

23. Din figura 40 se constată că, triunghiul ABC construit pe ipotenuza BC, este asemenea cu cele două triunghiuri construite pe cele două catete AB, AC și deci:

$$\frac{AA'}{2BC} = \frac{A'B'}{2AC} = \frac{A'C'}{2AB} = k.$$

În aceste condiții, ariile S_a, S_b, S_c ale celor 3 triunghiuri vor fi:

$$S_a = \frac{BC \cdot AA'}{2} = \frac{BC^2 \cdot AA'}{2BC} = BC^2 \cdot k,$$

$$S_b = \frac{AC \cdot A'B'}{2} = \frac{AC^2 \cdot A'B'}{2AC} = AC^2 \cdot k,$$

$$S_c = \frac{AB \cdot A'C'}{2} = \frac{AB^2 \cdot A'C'}{2AB} = AB^2 \cdot k,$$

iar relația evidentă dintre arii, $S_a = S_b + S_c$, devine:

$$kBC^2 = kAC^2 + kAB^2,\ k \neq 0 \qquad (19)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, după simplificare:

$$BC^2=AC^2+AB^2 \qquad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Observație. Relația particulară (19), unde k are o valoare dată se poate scrie și sub forma:

$$\alpha BC^2=\alpha AC^2+\alpha AB^2,$$

unde $\alpha\neq 0$, poate lua o infinitate de valori distincte. Se ajunge astfel la generalizarea teoremei lui Pitagora. Dacă pe laturile unui triunghi dreptunghic construim poligoane asemenea între ele, aria poligonului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor construite pe cele două catete (α fiind raportul de asemănare).

În particular, dacă α ia succesiv valorile:

$$\frac{\sqrt{3}}{4};\ 1;\ \frac{3\sqrt{3}}{2};\ 2(\sqrt{2}+1);\ 3(\sqrt{3}+2),$$

poligoanele construite pe laturile triunghiului dreptunghic sînt triunghiuri echilaterale, pătrate, hexagoane, octogoane și decagoane regulate.

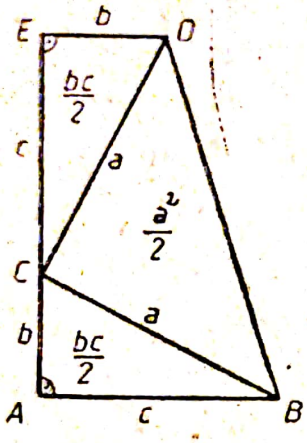


Fig. 40 a

24. O demonstrație folosind descompunerea unui trapez dreptunghic.

Construim trapezul dreptunghic $ABDE$ (fig. 40 a) în care:

$$\hat{A}=\hat{E}=90°;\ AB=CE=c;$$

$$DE=AC=b;\ AE=AC+CE=b+c.$$

Se constată că:

$$\text{aria } ABDE=\frac{1}{2}(AB+ED)\cdot AE=\frac{1}{2}(b+c)\cdot(b+c)=\frac{1}{2}(b+c)^2,$$

$$\text{aria } ABDE=\text{aria } ABC+\text{aria } CDE+\text{aria } BCD=\frac{1}{2}(2bc+a^2).$$

$$(b+c)^2=2bc+a^2,$$

sau:

$$b^2+c^2=a^2 \qquad \text{(c.c.t.d.)}.$$

*

Scanned with OKEN Scanner

III. *Reciproca teoremei lui Pitagora*

Dacă în triunghiul ABC (fig. 41) avem satisfăcută relația:

$$BC^2=AB^2+AC^2,$$

atunci el este dreptunghic ($\widehat{BAC}=90°$).

Demonstrația 1, dată de Euclid în *Elemente*, cartea I-a, teorema 48.

Ducem $AE\perp AC$, luăm $AD=AB$ și unim C cu D.

Cum $AD=AB$, avem, $AD^2=AB^2$ și $AD^2+AC^2=AB^2+AC^2$.

Dar:

$AB^2+AC^2=BC^2$ prin ipoteză,

$AD^2+AC^2=CD^2$ prin construcție ($\widehat{DAC}=90°$).

Rezultă $CD^2=BC^2$, deci $CD=BC$ și atunci $\triangle ADC=\triangle ABC$ având toate laturile egale ($AD=AB$, $AC=AC$, $CD=BC$). Triunghiurile ADC și ABC fiind egale și unghiurile ce se opun laturilor egale vor fi egale,

$$\widehat{BAC}=\widehat{DAC}=90° \qquad \text{(c.c.t.d.)}.$$

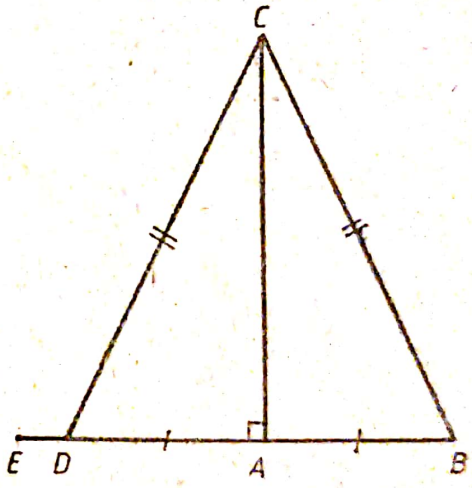


Fig. 41

Demonstrația 2: folosind teorema lui Pitagora generalizată la triunghiurile oarecare (fig. 42 a, b).

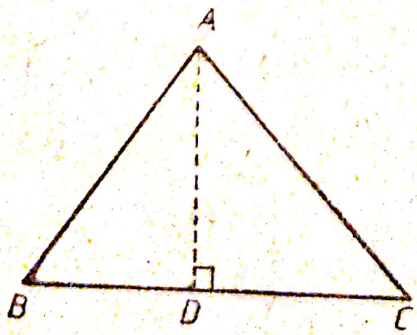


Fig. 42 a

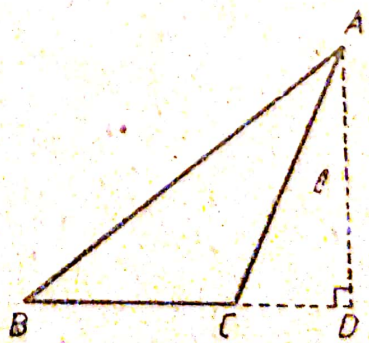


Fig. 42 b

Dacă scriem teorema lui Pitagora generalizată sub una din formele:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\,BC\cdot DC,$$

$$AB^2=AC^2+BC^2+2\,BC\cdot DC,$$

atunci relația $AB^2=AC^2+BC^2$, dată prin ipoteză, ne conduce la egalitatea $BC\cdot DC=0$. Cum $BC\neq 0$, rezultă $DC=0$ și, deci piciorul perpendicularei din A este C; rezultă $AC\perp BC$, $\hat{C}=90^\circ$ (c.c.t.d.).

Observație. Dacă scriem teorema lui Pitagora generalizată sub forma:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A,$$

cunoscută sub numele de teorema cosinusului, atunci, relația dată prin enunț, ne conduce la egalitatea:

$$AB\cdot AC\cos A=0.$$

Cum $AB\neq 0$, $AC\neq 0$, rezultă $\cos A=0$, sau $A=90^\circ$ (c.c.t.d.).

Scanned with OKEN Scanner

IV. *Generalizări și particularizări ale teoremei lui Pitagora*

1. Dacă pe laturile unui triunghi dreptunghic se descriu figuri asemenea, aria figurii descrise pe ipotenuză este egală cu suma ariilor figurilor descrise pe catete (fig. 43).

(Este prima generalizare cunoscută. A fost dată de Euclid în *Elemente* cartea a VI-a, teorema 31).

Prin ipoteză: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$; $\hat{A}=90°$.

Cum: $\frac{a^2}{aa'}=\frac{b^2}{bb'}=\frac{c^2}{cc'}=\frac{b^2+c^2}{bb'+cc'}=\frac{a^2}{bb'+cc'}$,

se deduce:

$$aa'=bb'+cc' \rightarrow S_a=S_b+S_c.$$

Dreptunghiu descris pe ipotenuză este egal cu suma dreptunghiurilor asemenea, construite pe catete (c.c.t.d.).

Observație. În general, figurile descrise pe laturile unui triunghi dreptunghic pot fi poligoane asemenea cu n laturi, regulate sau neregulate. Vom da cîteva exemple:

a) *Pe laturile triunghiului dreptunghic ABC se construiesc paralelograme asemenea* (fig. 44).

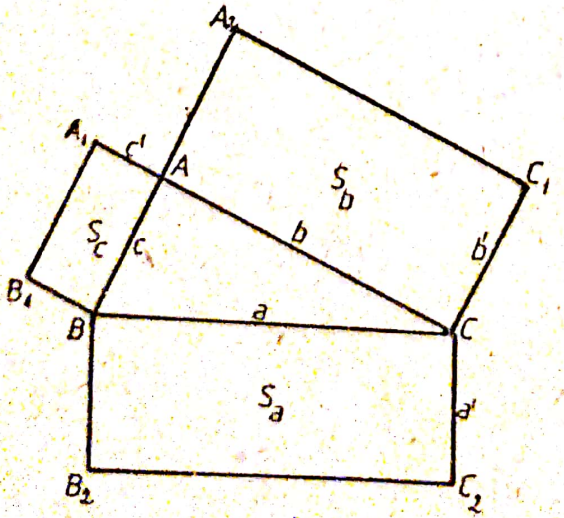


Fig. 43

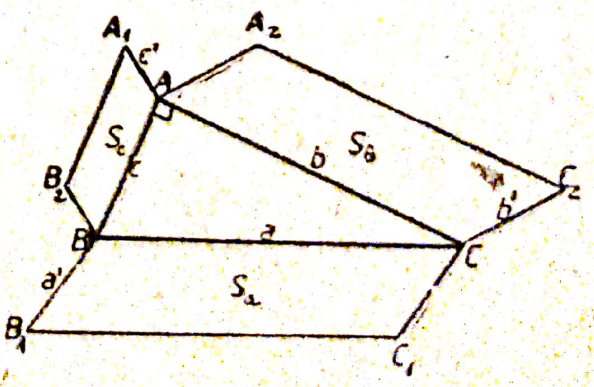


Fig. 44

Dacă notăm $P_a = BCC_1B_1$; $P_b = ACC_2A_2$; $P_c = ABB_2A_1$, prin ipoteză $P_a \sim P_b \sim P_c$ și deci raportul ariilor acestor paralelograme este egal cu pătratul raportului de asemănare:

$$\frac{S_a}{S_b} = \frac{a^2}{b^2}; \quad \frac{S_b}{S_c} = \frac{b^2}{c^2};$$

$$\frac{S_b + S_c}{S_b} = \frac{b^2 + c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{S_a}{S_b}; \quad (b^2 + c^2 = a^2),$$

$$\boxed{S_a = S_b + S_c}.$$

Dacă pe laturile unui triunghi dreptunghic se construiesc paralelograme asemenea, aria paralelogramului construit pe ipotenuză este egal cu suma ariilor paralelogramelor construite pe cele două catete (c.c.t.d.).

b) *Pe laturile triunghiului dreptunghic ABC se construiesc hexagoane regulate* (fig. 45).

Notăm, $P_a = BB_1B_2B_3B_4C$; $P_b = CC_1C_2C_3C_4A$; $P_c = AA_1A_2A_3A_4B$.

Cum prin ipoteză $P_a \sim P_b \sim P_c$, ariile acestor hexagoane sînt proporționale cu pătratul laturilor:

$$\frac{S_a}{a^2} = \frac{S_b}{b^2} = \frac{S_c}{c^2};$$

$$\frac{S_a}{a^2} = \frac{S_b + S_c}{b^2 + c^2} = \frac{S_b + S_c}{a^2}; \qquad (b^2 + c^2 = a^2),$$

$$\boxed{S_a = S_b + S_c} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

c) *Pe laturile triunghiului dreptunghic ABC se construiesc triunghiuri echilaterale* (fig. 46).

$$S_a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2; \qquad S_b = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2; \qquad S_c = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

$$S_b + S_c = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = S_a; \quad (b^2 + c^2 = a^2),$$

$$\boxed{S_a = S_b + S_c} \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Dacă unim A cu A', B cu B' și C cu C', segmentele AA', BB', CC' sînt concurente în punctul F, din care laturile triunghiului ABC se văd sub unghiuri de 120° ($\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120°$). Punctul F cunoscut și sub numele de punctul lui Torricelli se bucură de proprietatea: suma distanțelor din F la vîrfurile triunghiului este minimă. Această sumă este dată de formula[11]:

[11] Dedusă în [34], [35].

Scanned with OKEN Scanner

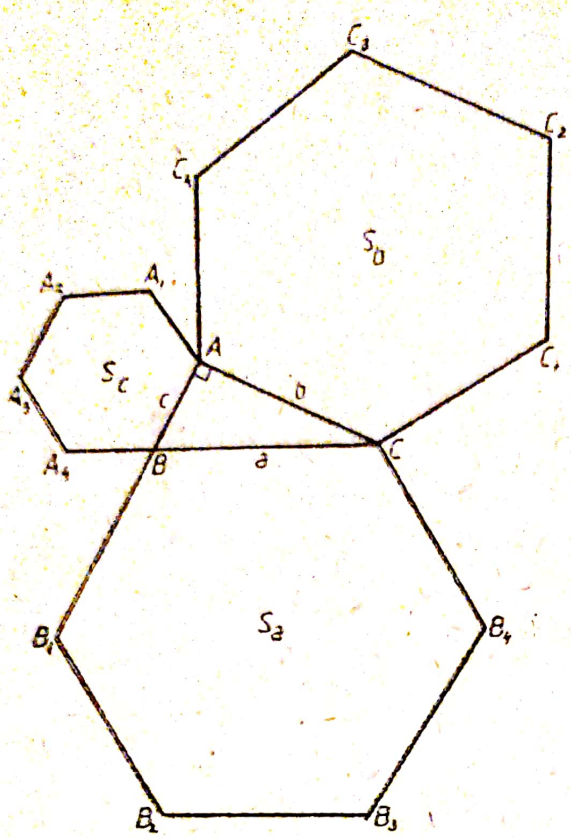


Fig. 45

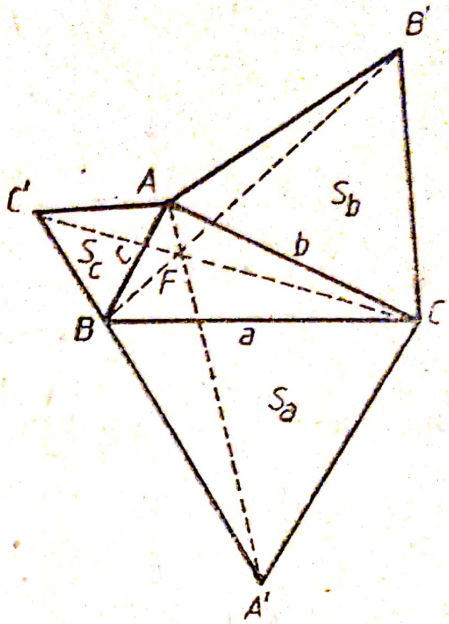


Fig. 46

$$FA+FB+FC=\sqrt{\frac{1}{2}\ (a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3})}.$$

Cum $\widehat{BAC}=90°$; $b^2+c^2=a^2$; $S=\frac{1}{2}\ bc$ și deci suma distanțelor de la punctul lui Torricelli la vîrfurile unui triunghi dreptunghic este dată de relația:

$$FA+FB+FC=\sqrt{a^2+bc\sqrt{3}}.$$

2. Pe laturile triunghiului dreptunghic ABC se construiesc segmente de cerc ce subîntind același unghi α (fig. 47).

Aria segmentului de cerc construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor segmentelor de cerc construite pe catete:

$$S_a=S_b+S_c.$$

Se știe că aria unui segment de cerc este dată de relația:

$$S_a=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi p}{180°}-\sin\beta\right)R_a^2=kR_a^2,\ (\beta=360°-\alpha),$$

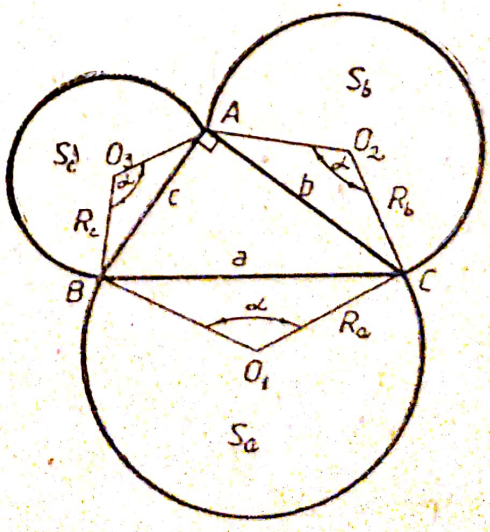


Fig. 47

$$S_b+S_c=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\beta}{180^\circ}-\sin\beta\right)(R_b^2+R_c^2)=k(R_b^2+R_c^2). \qquad (1)$$

Cum $\triangle ABO_3\sim\triangle BCO_1\sim\triangle CAO_2$,

$$\frac{R_a}{a}=\frac{R_b}{b}=\frac{R_c}{c}=m,$$

din care rezultă:

$$R_a=a\cdot m;\ R_b=b\cdot m;\ R_c=m\cdot c. \qquad (2)$$

Folosind (2) relația (1) devine:

$$S_b+S_c=km^2(b^2+c^2)=km^2a^2=kRa^2=S_a.$$

$$S_a=S_b+S_c \qquad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Dacă $\alpha=180^\circ$ se obțin semicercuri și deci, aria semicercului descris pe ipotenuză este egală cu suma ariilor semicercurilor descrise pe catete (fig. 48).

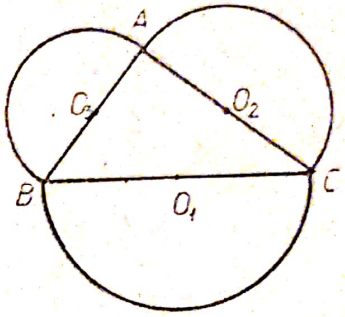


Fig. 48

Teorema lui Pitagora generalizată la triunghiuri oarecare.

3. Toate unghiurile sînt ascuțite.

Într-un triunghi în care toate unghiurile sînt ascuțite, pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două, din care se scade dublul produs al uneia din aceste laturi prin proiecția celeilalte pe ea.

Demonstrația 1. (dată de G. Ilovici în Gazeta Matematică nr. 3, 1896). Din triunghiurile dreptunghice AFC și AFB se deduce (fig. 49):

$$\triangle AFC.\cdot.ACRI = FCPK+ADEF;$$

$$ACRI = (BCQM+LKNM-2BFNM)+ADEF \qquad (3)$$

$$\triangle AFC.\cdot.LKMN=ABGH-ADEF.$$

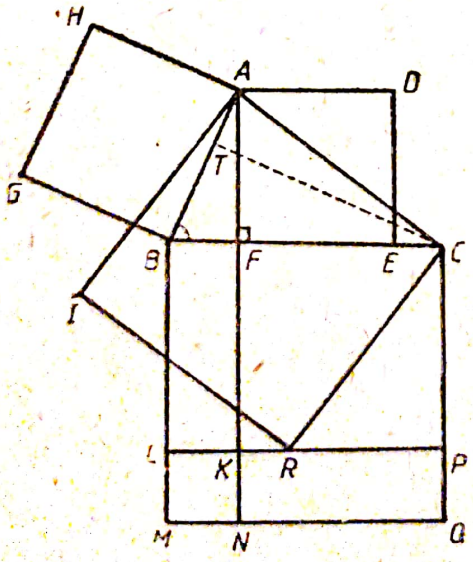


Fig. 49

Relația (3) devine:

$$ACRI=BCQM+ABGH-2BFNM,$$

$$AC^2=BC^2+AB^2-2BC\cdot BF.$$

O construcție similară ne conduce la relația:

$$AC^2=BC^2+AB^2-2AB\cdot BT \qquad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Demonstrația 2 (fig. 50):

Din triunghiurile ABC și ADC, teorema lui Pitagora ne conduce la relațiile:

$$\triangle ABD.\cdot.AD^2=AB^2-BD^2, \qquad (4)$$

$$\triangle ADC.\cdot.AD^2=AC^2-DC^2. \qquad (5)$$

Din (4) și (5) se deduce:

$$AB^2-BD^2=AC^2-DC^2,$$

$$AB^2=AC^2+BD^2-DC^2=AC^2+(BD+DC)(BD-DC). \qquad (6)$$

Cum: $BD+DC=BC$, și $BD-DC=(BC-DC)-DC=BC-2DC$, relația (6) devine:

$$AB^2=AC^2+BC(BC-2DC),$$

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot DC. \qquad (7)$$

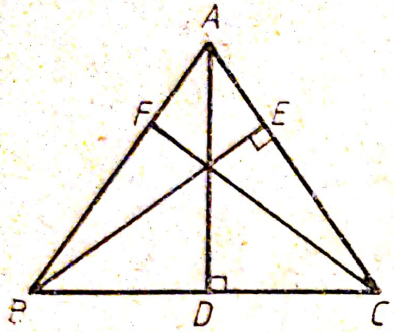


Fig. 50

În mod analog, folosind triunghiurile ABE și BCE se obține relația:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot EC. \qquad (8)$$

Relațiile (7) și (8) ne arată că: pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două, din care se scade dublul produs dintre una din aceste laturi și proiecția celeilalte pe ea (c.c.t.d.).

Demonstrația 3 (cu ajutorul funcțiilor trigonometrice).

Din figură se constată că:

$$BD=AB\cos B;\ DC=AC\cos C,$$

$$BC=BD+DC=AB\cos B+AC\cos C,$$

$$BC=AB\cos B+AC\cos C,\ (BC)$$

$$AC=BC\cos C+AB\cos A,\quad (-AC)$$

$$AB=AC\cos A+BC\cos B,\ (-AB).$$

Dacă înmulțim prima relație cu BC, a doua cu $-AC$, a treia cu $-AB$ și adunăm obținem:

$$BC^2-AC^2-AB^2=-2AB\cdot AC\cos A,$$

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AC\cos A. \qquad (9)$$

Cum $AB\cos A=AE$, $AC\cos A=AF$, relația de mai sus se poate scrie sub una din formele:

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AE,$$

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AF.$$

din care rezultă că: într-un triunghi ascuțitunghic, pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două, minus de două ori produsul uneia din ele prin proiecția celeilalte pe ea (c.c.t.d.).

Relația (9), cunoscută și sub numele de *teorema cosinusului*, este mai generală deoarece se aplică la orice triunghi.

Scanned with OKEN Scanner

4. Triunghiul are un unghi obtuz.

Într-un triunghi obtuzunghic, pătratul laturii care se opune unghiului obtuz, este egal cu suma pătratelor celorlalte două, la care se adună dublul produs dintre una din aceste laturi și proiecția celeilalte pe ea.

Demonstrația 1. (dată de G. Ilovici în Gazeta Matematică, nr. 4, 1896). Din triunghiul dreptunghic BCM:

$$CBDH = MBQF + CNPM. \tag{10}$$

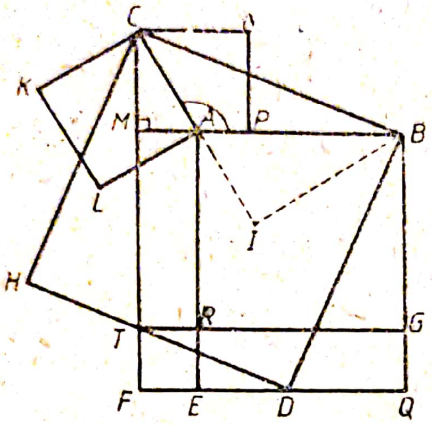


Fig. 51

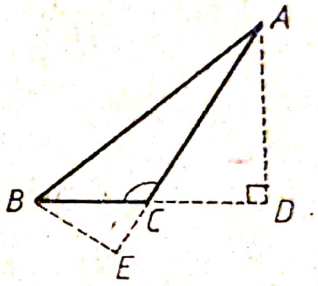


Fig. 52

Din figura 51 se constată că:

$$MBQF = ABGR + TREF + 2AMRT. \tag{11}$$

Folosnd (11), relația (10) devine:

$$CBDH = ABGR + (TREF + CNPM) + 2AMRT. \tag{12}$$

Cum triunghiul AMC este dreptunghic:

$$TREF + CNPM = ACKL, \tag{13}$$

relația (10) devine:

$$CBDH = ABGR + ACKL + 2AMTR,$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AM.$$

O construcție similară ne conduce la relația:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AI \qquad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Demonstrația 2 (fig. 52).

Din triunghiurile dreptunghice ABD și ADC, teorema lui Pitagora ne conduce la relațiile:

$$\triangle ABD. \cdot AD^2 = AB^2 - BD^2, \tag{14}$$

$$\triangle ADC. \cdot AD^2 = AC^2 - CD^2. \tag{15}$$

Din relația (14) și (15) se deduce:

$$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$$

$$AB^2=AC^2+(BD^2-CD^2)=AC^2+(BD-CD)(BD+CD). \quad (16)$$

Cum $BD-CD=BC$ și $BD+CD=(BC+CD)+CD=BC+2CD$ relația (16) devine:

$$AB^2=AC^2+BC(BC+2CD),$$

$$AB^2=AC^2+BC^2+2BC\cdot CD. \quad (17)$$

În mod analog, folosind triunghiurile ABE și ABC se obține relația:

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC\cdot EC. \quad (18)$$

Relațiile (17) și (18) ne arată că: într-un triunghi obtuzunghic, pătratul laturii care se opune unghiului obtuz, este egal cu suma pătratelor celorlalte două, la care se adună dublul produs dintre una din aceste laturi și proiecția celeilalte pe ea (c.c.t.d.).

Demonstrația 3 (cu ajutorul funcțiilor trigonometrice)

Dacă în relația:

$$AB^2=AC+BC^2-2AC\cdot BC\cos C, \quad (19)$$

obținută mai sus, unghiul $C>90°$; $\cos C=-\cos(180°-C)$ și relația (19) devine:

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC\cdot BC\cos(180°-C),$$

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC\cdot BC\cos\widehat{ACD}. \quad (20)$$

Cum $AC\cos\widehat{ACD}=CD$ și $BC\cos\widehat{ACD}=BC\cos\widehat{BCE}=CE$, relația (20) se poate scrie sub una din formele:

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC\cdot CE,$$

$$AB^2=AC^2+BC^2+2BC\cdot CD,$$

din care rezultă că: într-un triunghi, pătratul laturii care se opune unui unghi obtuz, este egal cu suma pătratelor celorlalte două, la care se adună dublul produs dintre una din aceste laturi și proiecția celeilalte pe ea.

Observație. Generalizarea teoremei lui Pitagora la triunghiurile oarecare a fost propusă și demonstrată pentru prima oară de Euclid în lucrarea sa *Elemente*.

Cazul în care toate unghiurile sînt ascuțite

„Într-un triunghi ascuțitunghic, pătratul laturii ce subîntinde unghiul ascuțit este mai mic decît pătratele laturilor ce cuprind unghiul ascuțit cu de două ori dreptunghiul cuprins de una din laturile adiacente, aceea pe care cade perpendiculara, și de porțiunea tăiată de perpendiculară în interior de partea unghiului ascuțit (teorema 13, cartea II.a, din Elemente).

Demonstrația dată de Euclid[12]

Din figura 53 a avem,

$$DC^2=(BC-BD)^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD.$$

[12] Demonstrațiile au fost expuse în limbajul actual.

Scanned with OKEN Scanner

Adaug pătratul lui AD în ambii membri

$$DC^2+AD^2=BC^2+(BD^2+AD^2)-2BC\cdot BD. \qquad (21)$$

Aplic teorema lui Pitagora la triunghiurile dreptunghice ADC și ABD:

$$\triangle ADC \Rightarrow DC^2+AD^2=AC^2,$$

$$\triangle ADB \Rightarrow BD^2+AD^2=AB^2. \qquad (22)$$

Folosind (22) egalitatea (21) se scrie,

$$AC^2=BC^2+AB^2-2BC\cdot BD \qquad \text{(c.c.t.d.)}$$

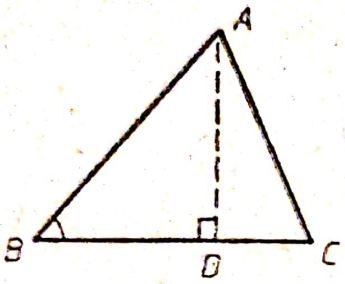


Fig. 53 a

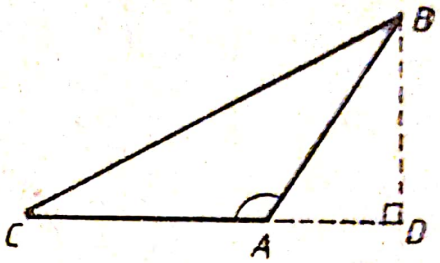


Fig. 53 b

Cazul în care triunghiul are un unghi obtuz.

„Într-un triunghi obtuzunghic, pătratul laturii ce subîntinde unghiul obtuz este mai mare decît pătratele ce cuprind unghiul obtuz cu de două ori dreptunghiul cuprins de una din laturile adiacente unghiului obtuz, aceea pe care cade perpendiculara, și de porțiunea tăiată de perpendiculară din prelungirea acesteia în afara unghiului obtuz" (teorema 12, cartea a II-a, din Elemente).

Demonstrația dată de Euclid.

Din figura 53 b avem:

$$DC^2=(AC+AD)^2=AC^2+AD^2+2AC\cdot AD.$$

Adaug pătratul lui BD în ambii membri,

$$DC^2+BD^2=AC^2+(BD^2+AD^2)+2AC\cdot AD. \qquad (23)$$

Aplic teorema lui Pitagora triunghiurilor dreptunghice BDC și ABD:

$$\triangle BDC \Rightarrow DC^2+BD^2=BC^2,$$

$$\triangle ABD \Rightarrow BD^2+AD^2=AB^2. \qquad (24)$$

Dacă ținem seama de (24) egalitatea (23) devine,

$$BC^2=AC^2+AB^2+2AC\cdot AD \quad \text{(c.c.t.d.)}$$

5. O generalizare a teoremei lui Pitagora atribuită lui Pappus din Alexandria sec. 2–3 e.n.

Pe laturile unui triunghi ABC construim paralelogramele oarecare AA_1B_1B, ACC_1A_2. Fie D intersecția dreptelor B_1A_1, C_1A_2. Ducem segmentele BB_2, CC_2 egale și paralele cu AD (fig. 54 a).

Avem următoarea relație *între arii*:

$$BB_2C_2C - AA_1B_1B + ACC_1A_2. \tag{25}$$

$\triangle BB_1B_2 = \triangle AA_1D$ și $\triangle CC_1C_2 = \triangle AA_2D$ (având $BB_1 \parallel\!= AA_1$; $BB_2 \parallel\!= AD$; $CC_2 \parallel\!= AD$; $CC_1 \parallel\!= AA_2$); va trebui să arătăm că între arii avem relația:

$$BB_2C_2C = BB_2DA + CC_2DA.$$

Se constată că *între arii* avem:

$$BAC + BB_2DA + CC_2DA = BB_2C_2C + B_2DC_2.$$

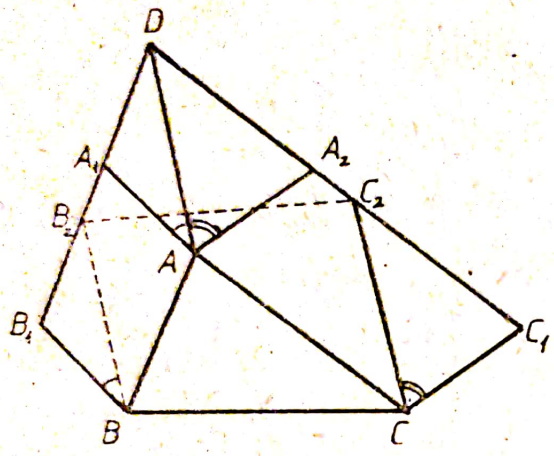


Fig. 54 a

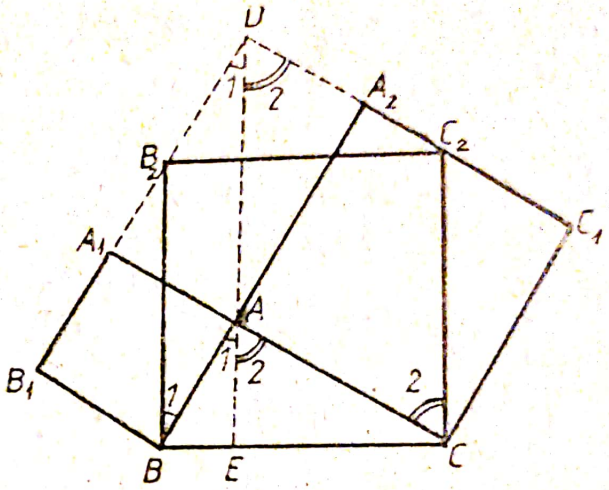


Fig. 54 b

Cum $BAC = B_2DC_2$ (având $BA = B_2D$; $AC = DC_2$; $BC = B_2C_2$, ca laturi opuse într-un paralelogram), se obține:

$$BB_2C_2C = BB_2DA + CC_2DA \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

În particular, dacă $\widehat{BAC} = 90°$ și pe catetele AB și AC se descriu pătrate, atunci relația (25) devine:

$$BB_2C_2C = AA_1B_1B + ACC_1A_2.$$

Cum $BB_2 = AD = CC_2 = B_2C_2 = BC$, $\widehat{B_2BA} = \hat{A}_1 = \hat{D}_1$, și $\widehat{ACC_2} = \hat{A}_2 = D_2$, iar $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90°$, rezultă $DE \perp BC$, $\hat{B}_2 = \hat{C}_2 = 90°$. Patrulaterul BB_2C_2C este un pătrat și deci:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Teorema lui Pitagora este deci un caz particular al teoremei lui Pappus (fig. 54 b).

6. Teorema lui Pitagora în spațiul euclidian R^3.

Pătratul diagonalei unui paralelipiped drept este egal cu suma pătratelor muchiilor.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația 1

Din triunghiul ABD, dreptunghic în A,

$$BD^2=AB^2+AD^2. \tag{26}$$

Din triunghiul BDD', dreptunghic în D,

$$BD'^2=DB^2+DD'^2. \tag{27}$$

Dacă ținem seama de (26), egalitatea (27) devine,

$$BD'^2=AB^2+AD^2+DD'^2,$$

sau, folosind notațiile din figura 55, $d^2=a^2+b^2+c^2$ (c.c.t.d.).

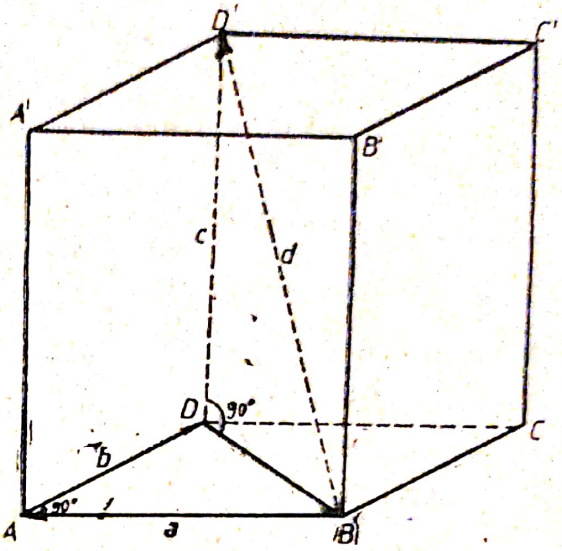


Fig. 55

Pătratul unui număr natural se poate descompune într-o sumă de 3 pătrate în mai multe moduri diferite. Exemple:

$$9^2=8^2+4^2+1^2=6^2+6^2+3^2;$$

$$21^2=18^2+9^2+6^2=14^2+14^2+7^2;$$

$$63^2=54^2+27^2+18^2=42^2+42^2+21^2=$$

$$=56^2+28^2+7^2.$$

Dacă $a, b, c, d \in N$, descompunerea $d^2=a^2+b^2+c^2$ nu este întotdeauna unică.

Observație. Spațiul euclidian real tridimensional R^3 este o mulțime ale cărei elemente sînt sisteme ordonate de cîte 3 numere reale, (x_1, x_2, x_3) numite puncte, pe care s-a definit o distanță $d(x, y)$, între două puncte $x(x_1, x_2, x_3)$ $y(y_1, y_2, y_3)$ prin relația:

$$d(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

Pe un astfel de spațiu se poate defini un produs scalar dat de relația:

$$\bar{x}\cdot\bar{y}=x\cdot y\cos(\widehat{\bar{x}, \bar{y}}).$$

Demonstrația 2

Din figura 55 se constată că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ închid un contur și deci,

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{d}.$$

Ridicăm la pătrat în ambii membri și ținem seama de expresia produsului scalar a doi vectori,

$$(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2=\bar{d}^2$$

$$\bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+2\bar{a}\cdot\bar{c}+2\bar{b}\cdot\bar{c}=d^2. \tag{28}$$

Cum $(\widehat{\bar{a}, \bar{a}})=(\widehat{\bar{b}, \bar{b}})=(\widehat{\bar{c}, \bar{c}})=0°$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})=(\widehat{\bar{a}, \bar{c}})=(\widehat{\bar{b}, \bar{c}})=90°$,

$$\bar{a}^2=a^2,\ \bar{b}^2=b^2,\ \bar{c}^2=c^2,\ \bar{d}^2=d^2;\ \bar{a}\cdot\bar{b}=ab\cos 90°=0,$$

$\bar{a}\cdot\bar{c}=a\cdot c\cos 90°=0$, $\bar{b}\cdot\bar{c}=b\cdot c\cos 90°=0$, relația (28) se scrie:

$$a^2+b^2+c^2=d^2 \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

7. Teorema lui Pitagora extinsă la un spațiu euclidian real n-dimensional (R^n)

În general, teorema lui Pitagora se poate extinde la un spațiu euclidian n-dimensional și enunța astfel:

Pătratul diagonalei unui hiperparalelipiped drept din spațiul R^n este egal cu suma pătratelor muchiilor.

Dacă notăm cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muchiile hiperparalelipipedului drept din spațiul R^n, diagonala lui a, este dată de relația:

$$a^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n.$$

Demonstrație.

Pe muchiile acestui hiperparalelipiped drept și pe diagonala lui așezăm vectorii: $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, -\bar{a}$. Cum ei închid un contu, vom putea scrie:

$$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\ldots+\bar{a}_n-\bar{a}=0,$$

$$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\ldots+\bar{a}_n=\bar{a}.$$

Ridicăm la pătrat în ambii membri:

$$\bar{a}_1^2+\bar{a}_2^2+\ldots+\bar{a}_n^2+2\bar{a}_1\bar{a}_2+\ldots 2\bar{a}_{n-1}\bar{a}_n=\bar{a}^2.$$

Cum $(\widehat{a_i, a_i})=0°$ și $(\widehat{a_i, a_j})=90°$; $i\neq j=1, 2, \ldots, n$;

$$\bar{a}_i^2=a_i^2;\ \bar{a}_i\bar{a}_j=0;\ i\neq j=1, 2, \ldots, n,$$

expresia de mai sus devine:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=a^2 \qquad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Se poate arăta că: orice număr natural x este suma a cel mult patru pătrate perfecte.

Altfel spus, ecuația

$$x=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,$$

admite soluții în mulțimea numerelor naturale.

Cum x poate fi și pătratul unui număr natural a, rezultă că pătratul unui număr natural poate fi suma a cel mult patru pătrate.

Exemple:

$5^2=4^2+2^2+2^2+1^2$; $\quad 25=16+4+4+1$;

$9^2=8^2+3^2+2^2+2^2$; $\quad 81=64+9+4+4$;

$11^2=10^2+4^2+2^2+1^2$; $\quad 121=100+16+4+1$.

Descompunerea într-o sumă de patru pătrate nu este unică.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu:

$$10^2=9^2+3^2+3^2+1^2=7^2+7^2+1^2+1^2=7^2+5^2+$$
$$+5^2+1^2=5^2+5^2+5^2+5^2,$$
$$100=81+9+9+1=49+49+1+1=49+25+25+1=$$
$$=25+25+25+25.$$

Observație. Matematicianul francez Fermat Pierre (1601—1665) și-a pus întrebarea dacă nu există numere $a, b, c, \in N$, care să satisfacă relația:

$$a^n=b^n+c^n, \qquad n\in N,\ n>2,$$

cunoscută sub numele de *Marea teoremă a lui Fermat.*

Pentru $n=1$, se obține egalitatea banală $a=b+c$, care admite o infinitate de soluții în numere raționale, $b=an:(n+1)$; $c=a:(n+1)$; $b+c=(an+a):(n+1)=a$; $\forall n\in\mathbb{N}$.

Pentru $n=2$, se obține teorema lui Pitagora

$$a^2=x^2+y^2.$$

Diofant (matematician grec, sec. 3—4) a arătat că, dat fiind numărul natural a, ecuația de mai sus admite o infinitate de soluții în numere raționale.

Pentru a justifica această afirmație este suficient să luăm

$$x=a\cdot\frac{1-p^2}{1+p^2};\quad y=a\cdot\frac{2p}{1+p^2},\ \forall p\in\mathbb{N}.$$

Se obține:

$$x^2+y^2=a^2\cdot\left[\left(\frac{1-p^2}{1+p^2}\right)^2+\left(\frac{2p}{1+p^2}\right)^2\right]=a^2,\ \forall p\in\mathbb{N}.$$

Pentru $n>2$ se obține relația $a^n=b^n+c^n$.

Fermat a afirmat că dacă, $a; b, c\in\mathbb{N}$, această relație nu poate avea loc, oricare ar fi $n\in N$, $n\neq 1$, $n\neq 2$.

Euler (1707—1783) demonstrează teorema lui Fermat pentru $n=3$.

Fermat însuși dă o demonstrație pentru $n=4$, Legendre (1752—1833) o demonstrează pentru $n=5$.

Mulți matematicieni iluștri s-au ocupat de această teoremă, printre care: Abel (1802—1829); Dirichlet (1805—1859) dă o demonstrație pentru $n=14$. Lebesgue (1791—1875), Lamé (1795—1870), Cauchy (1789—1857), Kronecker (1823—1891), Catalan (1814—1894), Hurwitz (1859—1919), Frobenius (1849—1917), Lindemann (1859—1939), Mordell (1888—1972). Se cunosc demonstrații pentru $n=3,\ 4,\ 5,\ldots,\ 14\,000$.

Teorema a rămas nedemonstrată pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Din cele expuse se constată că teorema lui Pitagora nu poate fi extinsă la exponenți mai mari ca 2, deoarece relația $a^n=b^n+c^n$ cu $a, b, c, n\in\mathbb{N}$ are loc numai pentru $n=1$ și $n=2$.

Scanned with OKEN Scanner

V. *Numere pitagoreice*

Trei numere naturale x, y, z, care satisfac relația

$$x^2+y^2=z^2, \tag{1}$$

se numesc numere pitagoreice. Astfel de numere determină triunghiuri dreptunghice.

Vechii egipteni cunoșteau unele triunghiuri dreptunghice ale căror laturi erau: (3, 4, 5); (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61) precum și cîteva asemenea cu ele.

*

În școala lui Pitagora s-a pus problema rezolvării în numere întregi a ecuației pitagoreice (1), găsind soluția:

$$x=2p+1;\ y=2p^2+2p;\ z=2p^2+2p+1. \tag{2}$$

Într-adevăr, se constată ușor că:

$$(2p+1)^2+(2p^2+2p)^2=(2p^2+2p+1)^2 \quad p\in N.$$

Cum $y=2p(p+1)$ este un număr par, iar $x=2p+1$ este impar, rezultă că x și y sînt prime între ele.

Deoarece $z=y+1$, z și y sînt prime între ele. Cum z și x sînt impare și prime cu p, iar $z=x+2p^2$, rezultă că x și z sînt prime între ele. În consecință, numerele pitagoreice obținute din relațiile (2) *sînt prime între ele.*

O altă soluție în numere întregi a ecuației (1) a fost dată în școala lui Platon și este de forma:

$$x=m(n^2-p^2);\ y=2mnp;\ z=m(n^2+p^2);\ \forall m, n, p\in Q,\ n>p. \tag{3}$$

Se constată că:

$$m^2(n^2-p^2)^2+4m^2n^2p^2=m^2(n^2+p^2)^2.$$

Pentru $m=p=1$, formulele (3) devin:

$$x=n^2-1;\quad y=2n;\quad z=n^2+1;\quad \forall n\in Q;\ n>1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m=\frac{1}{2}$, $p=1$ se obțin formulele:

$$x=\frac{1}{2}(n^2-1);\ y=n;\ z=\frac{1}{2}(n^2+1);$$

valabile pentru n *impar* ($n=2k+1$, $k\geqslant 1$; $k\in \mathbf{N}$).

Pentru $m=1$, formulele (3) devin:

$$x=n^2-p^2;\ y=2np;\ z=n^2+p^2;$$

$$n>p>0;\ x, y, z>0.$$

Aceste soluții care depind de doi parametri au fost demonstrate de Gabriel Sudan[13] și publicate în revista *NUMERUS* vol. 8, oct. 1941.

Pentru $m=2$, $n>p$; $p\neq 0$, formulele 3 devin:

$$x=2(n^2-p^2);\ y=4np;\ z=2(n^2+p^2)\ \ n, p\in Q,\ n>p\neq 0$$

și ne permite să calculăm numere pitagoreice *pare*.

Pentru $m=4$, $p=\frac{1}{2}$ se obțin formulele: $x=4n^2-1$, $y=4n$, $z=4n^2+1$, care ne dau numere pitagoreice prime între ele, y este divizibil cu 4, iar x și z sînt două numere impare consecutive.

Folosind formulele (2) sau (3) se pot obține toate soluțiile în numere naturale ale ecuației pitagoreice (1).

Numerele pitagoreice $x, y, z\leqslant 100$ au fost trecute în tabela de mai jos:

I	Nr. crt.	x	y	z	x^2	y^2	x^2	II
	1	3	4	5	9	16	25	
	2	6	8	10	36	64	100	
	3	9	12	15	81	144	225	
	4	12	16	20	144	256	400	
	5	15	20	25	225	400	625	
	6	18	24	30	324	576	700	
	7	21	28	35	441	784	1225	
	8	24	32	40	576	1024	1600	
	9	27	36	45	729	1296	2025	
20	10	30	40	50	900	1600	2500	1
	11	33	44	55	1089	1936	3025	
	12	36	48	60	1296	2304	3600	
	13	39	52	65	1521	2704	4225	
	14	42	56	70	1764	3136	4900	
	15	45	60	75	2025	3600	5625	
	16	48	64	80	2304	4096	6400	
	17	51	68	85	2601	4624	7225	
	18	54	72	90	2916	5184	8100	

[13] matematician român (1899–1978)

(continuare tabel)

I	Nr. crt.	x	y	z	x^2	y^2	z^2	II
	19	57	76	95	3249	5776	9025	
	20	60	80	100	3600	6400	10000	
	21	5	12	13	25	144	169	
	22	10	24	26	100	576	676	
7	23	15	36	39	225	1296	1521	2
	24	20	48	52	400	2304	2704	
	25	25	60	65	625	3600	4225	
	26	30	72	78	700	5184	6084	
	27	35	84	91	1225	7056	8281	
	28	8	15	17	64	25	289	
	29	16	30	34	256	900	1156	
5	30	24	45	51	576	2025	2601	3
	31	32	60	68	1024	3600	4624	
	32	40	75	85	1600	5625	7225	
	33	7	24	25	49	576	625	
4	34	14	48	50	196	2304	2500	4
	35	21	72	75	441	5184	5625	
	36	28	96	100	784	9216	10000	
	37	20	21	29	400	441	841	
3	38	40	42	58	1600	1764	3364	5
	39	60	63	87	3600	3969	7569	
2	40	12	35	37	144	1225	1369	6
	41	24	70	74	576	4900	5476	
	42	9	40	41	81	1600	1681	
2	42	18	80	82	324	6400	6724	7
1	44	28	45	53	784	2025	2809	8
1	45	11	60	61	121	3600	3721	9
1	46	33	56	65	1089	3136	4225	10
1	47	16	63	65	256	3969	4225	11
1	48	48	55	73	2304	3025	5329	12
1	49	36	77	85	1296	5929	7225	13
1	50	13	84	85	169	7056	7225	14
1	51	39	80	89	1521	6400	7921	15
1	52	65	72	97	4225	5184	9409	16

Din tabel se constată că avem în total 52 triunghiuri dreptunghice cu laturile $x<100$, $y<100$, $z<100$, dar numai 16 au forme diferite neasemenea (coloana II).

Dintre acestea, 20 sînt asemenea cu triunghiul de laturi (3, 4, 5), 7 asemenea cu triunghiul de laturi (5, 12, 13), 5 asemenea cu triunghiul de laturi (8, 15, 17), ...,ultimele 9 triunghiuri sînt diferite neasemenea (coloana I).

Scanned with OKEN Scanner

VI. *Construirea numerelor iraționale de forma*

$$\sqrt{a},\ \sqrt{a_1^2+a_2^2},\ldots,\ \sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2},\ a,\ a_1,\ldots,a_n\in N$$

După ce în școala lui Pitagora s-a demonstrat că $\sqrt{2}$ și $\sqrt{5}$ sînt mărimi iraționale (incomensurabile față de unitate), un alt matematician grec, Teodor din Cirene (sec. 5 î.e.n.), dovedește și incomensurabilitatea față de unitate a numerelor $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11},\ldots,\sqrt{17}$, folosind metode geometrice.

Teetet din Atena (414—368), unul din elevii lui Teodor face o clasificare a numerelor iraționale și se ocupă de segmente incomensurabile de forma:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\ \sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\sqrt{c}+\sqrt{d}}.$$

Construirea numerelor iraționale $\sqrt{n}(n\neq a^2;\ a\in\mathbf{N})$, se poate face ușor cu rigla și compasul, folosind teorema lui Pitagora, teorema catetei sau teorema înălțimii. Adică una din relațiile din triunghiul dreptunghic ABC, în care $AD\perp BC$:

$$BC^2=AB^2+AC^2,\quad AB^2=BC\times BD;$$

$$AC^2=BC\times DC;$$

$$AD^2=BD\times DC$$

Folosind inițial triunghiul dreptunghic ale cărui catete sînt egale cu unitatea, se obțin succesiv numerele iraționale:

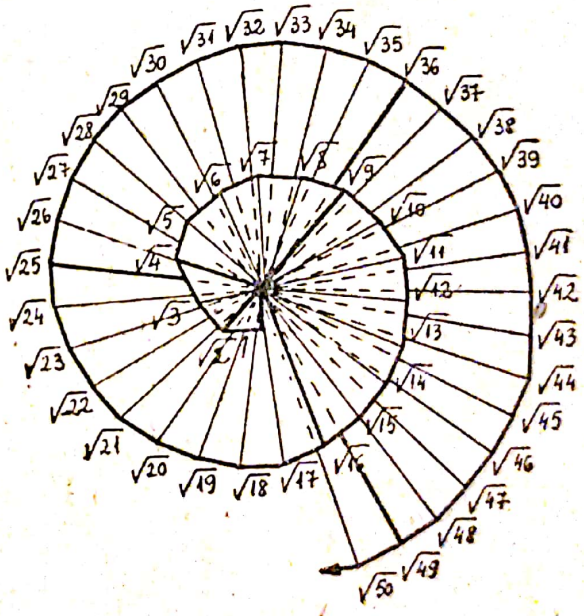


Fig. 56

$$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1^2};$$

$$\sqrt{3}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2},\ldots,\sqrt{n+1}=\sqrt{1^2+(\sqrt{n})^2}.$$

În figura 56 au fost construite în acest mod numerele iraționale consecutive $\sqrt{2}$, $\sqrt{3},\ldots,\sqrt{50}$.

Construirea numerelor iraționale de forma:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2},\ \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ldots,\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se construiește inițial triunghiul dreptunghic ale cărui catete sînt a_1 și a_2. Ipotenuza acestui triunghi va fi $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$. Construim apoi triunghiul dreptunghic de catete $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ și a_3. Ipotenutza acestui nou triunghi va fi $\sqrt{\sqrt{(a_1^2+a_3^2)^2}+a_3^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, egală cu diagonala unui paralelipiped

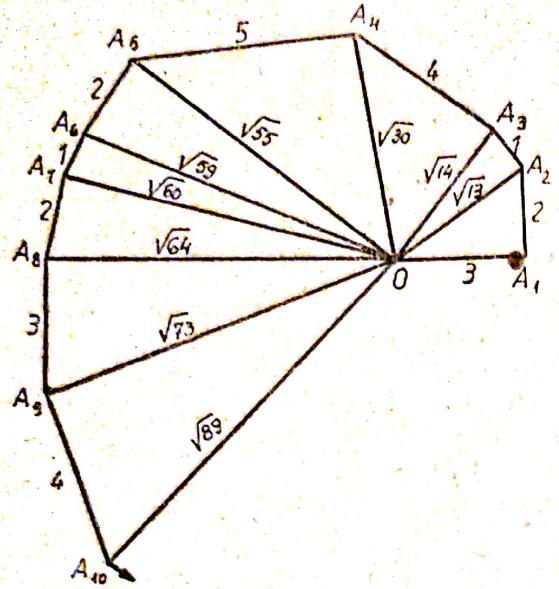


Fig. 57

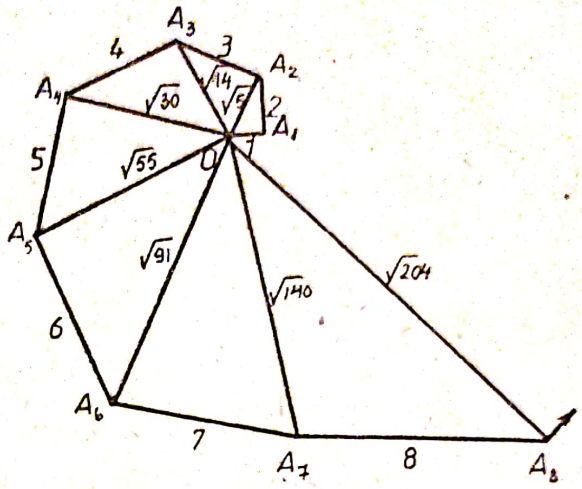


Fig. 58

de dimensiuni a_1, a_2, a_3. Folosind succesiv acest procedeu se obțin oricîte numere de forma $\sqrt{a_1^2+a_1^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}$. În figura 57 au fost calculate succesiv numerele iraționale:

$$OA_2=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13};\ OA_3=\sqrt{13+1^2}=\sqrt{14};\ OA_4=\sqrt{14+16}=\sqrt{30};$$

$$OA_5=\sqrt{30+25}=\sqrt{55};\ OA_6=\sqrt{59};\ OA_7=\sqrt{60};\ OA_8=\sqrt{64};$$

$$OA_9=\sqrt{64+9}=\sqrt{73};\quad OA_{10}=\sqrt{73+4^2}=\sqrt{89}.$$

În particular, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi consecutive, se obțin numerele iraționale de forma:

$$\sqrt{1^1+2^2},\ \sqrt{1^2+2^2+3^2},\ldots,\sqrt{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}=\sqrt{\frac{1}{6}x(n+1)(2n+1)};\ n\in N$$

Pentru $n=2, 3,\ldots,8$ se obțin numere iraționale din figura 58.

$$OA_2=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5};\ OA_3=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14};$$

$$OA_4=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}=\sqrt{30},\ OA_5=\sqrt{30+5^2}=\sqrt{55},$$

$$OA_6=\sqrt{55+6^2}=\sqrt{91},\ OA_7=\sqrt{91+7^2}=\sqrt{140},\ OA_8=\sqrt{140+8^2}=\sqrt{204}.$$

Un alt mod de a calcula numerele iraționale de forma $\sqrt{n}$ cu rigla și compasul se bazează pe teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic.

Scanned with OKEN Scanner

În figura 59 au fost construite semicercuri concentrice cu centrul 0 și cu razele egale cu 1, 2, ..., 6.

Intersecția perpendicularelor pe raza OA în punctele de diviziune 1, 2, ..., 6 cu sferturile de cerc de raze 1, 2, ..., 6 ne dau numerele iraționale $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{9}, \sqrt{11}; \sqrt{8}, \sqrt{12}, \sqrt{16}, \sqrt{20}; \sqrt{15}, \sqrt{21}, \sqrt{27}; \sqrt{24}, \sqrt{32}, \sqrt{35}$.

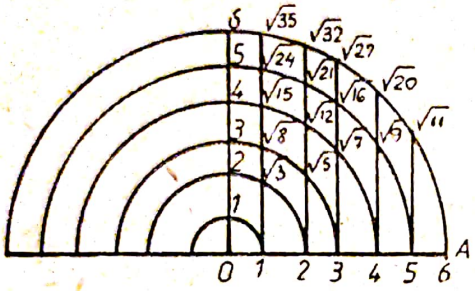


Fig. 59

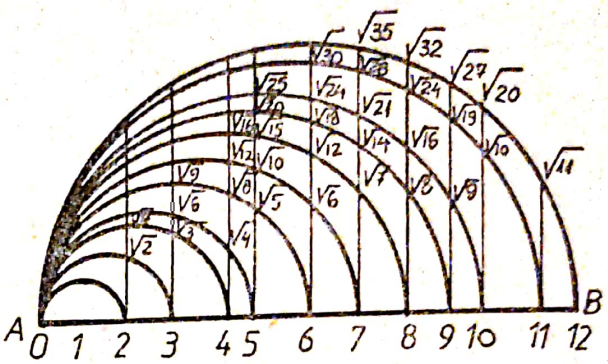


Fig. 60

În figura 60 au fost construite semicercuri de diametre 2, 3,..., 12. Intersecția perpendicularelor pe diametrul AB în punctele de diviziune 2, 3,..., 11 cu semicercurile de diametre 3, 4,..., 12 ne dau succesiv numere iraționale

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{11}; \sqrt{4}, \sqrt{6}, \ldots, \sqrt{20}; \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots, \sqrt{27}; \sqrt{16}, \sqrt{20}, \sqrt{24},$$
$$\sqrt{28}, \sqrt{32}; \sqrt{25}, \sqrt{30}, \sqrt{35}.$$

VII. *Aplicații ale teoremei lui Pitagora*

a. Lunulele lui Hipocrat din Chios[14]

1. Ocupîndu-se de rezolvarea cvadraturei cercului, Hipocrat a construit pentru prima oară figuri curbilinii (mărginite de arce de cerc) numite *Lunule* ale căror arii sînt echivalente cu figuri mărginite de linii drepte (construite cu rigla și compasul). Astfel de lunule se numesc cuadrabile. Primul exemplu dat de Hipocrat este lunula construită pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel OAB mărginită de semicercul de diametru AB și sfertul de cerc de rază OA (fig. 61).

Dacă notăm cu L aria lunulei și cu T aria triunghiului dreptunghic, putem scrie relația între arii:

$$L=\frac{\pi AB^2}{8}+T-\frac{\pi OA^2}{4}=T+\frac{\pi}{8}(AB^2-2OA^2).$$

Cum triunghiul AOB este dreptunghic isoscel, $AB^2=OA^2+OB^2=2\,OA^2$ și deci $L=T$. Aria lunulei cuprinsă între semicercul de diametru AB și sfertul de cerc de rază OA este egală cu aria triunghiului dreptunghic AOB.

2. Dacă așezăm de două ori figura 61 de-a lungul unei catete se obține figura 62 din care rezultă că, aria celor două lunule cuprinse între semicercurile de diametre egale cu catetele și ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel, este egală cu aria acelui triunghi.

$$L+L=\frac{\pi AB^2}{8}+\frac{\pi AC^2}{8}+T-\frac{\pi BC^2}{8}=+T+\frac{\pi}{8}(AB^2+AC^2-BC^2).$$

Cum $AB^2+AC^2=BC^2$, rezultă $2L=T$ (c.c.t.d.).

3. Dacă așezăm 4 lunule ca acelea din figura 61, una lîngă alta, ca în figura 63, se constată că aria celor 4 lunule definite de semicercurile de diametre egale cu laturile unui pătrat și de cercul circumscris acelui pătrat, este egală cu aria pătratului ($4L=P$).

4. O altă lunulă cuadrabilă construită de Al. Haisam[15] (965—1039) se poate vedea în figura 64. Suma ariilor celor două lunule, mărginite de semi-

[14] Geometru grec, sec. V î.e.n., a scris prima lucrare sistematică de geometrie și a descoperit LUNULELE care-i poartă numele.

[15] Matematician, astronom și fizician egiptean; a activat la Cairo.

cercurile construite pe catetele unui triunghi dreptunghic oarecare și de semicercul construit pe ipotenuză, este egală cu aria acelui triunghi.

Din figura 64 se constată că:

$$L_1+L_2=\frac{\pi}{8}AB^2+\frac{\pi}{8}AC^2+T-\frac{\pi}{8}BC^2=T+\frac{\pi}{8}(AB^2+AC^2-BC^2).$$

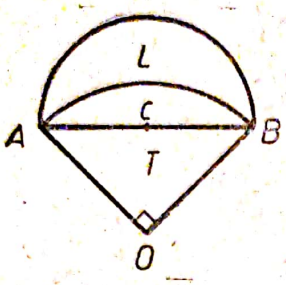


Fig. 61

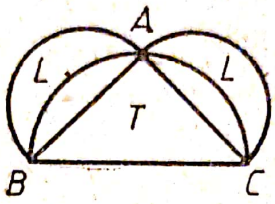


Fig. 62

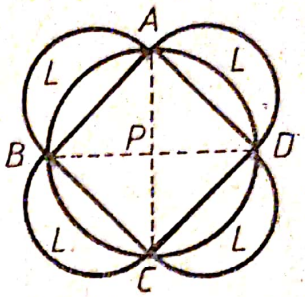


Fig. 63

Cum $\triangle ABC$ este dreptunghic în A, în baza teoremei lui Pitagora, $AB^2+AC^2=BC^2$, și deci $L_1+L_2=T$ (c.c.t.d.).

În particular, dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel, se obține prima lunulă a lui Hipocrat (fig. 61).

5. Dacă așezăm de două ori fig. 64 de-a lungul ipotenuzei BC, se obține figura 65, din care rezultă că: aria celor 4 lunule definite de semicercurile cu diametrele egale cu laturile unui dreptunghi și de cercul circumscris dreptunghiului, este egală cu aria acelui dreptunghi $2L_1+2L_2=2T=D$ (c.c.t.d.).

În particular, dacă $AB=AC$ se obțin lunulele din figura 63.

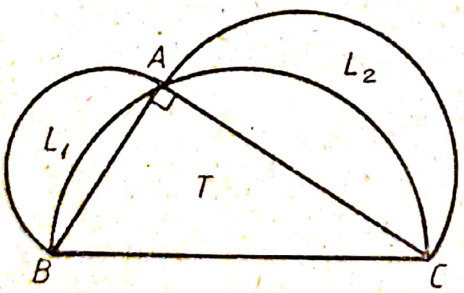


Fig. 64

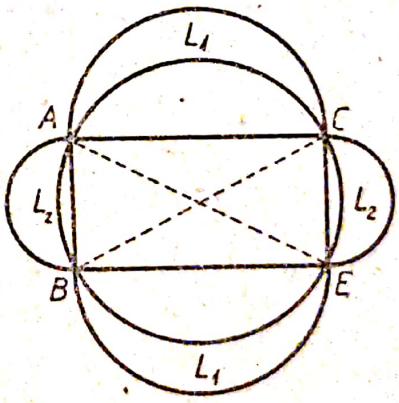


Fig. 65

Hipocrat a studiat în total 3 lunule cuadrabile. Prima, expusă mai sus în figura 61 este mărginită în exterior de un semicerc, iar în interior de un sfert de cerc. Dacă notăm $BC=r$; $OB=r'$ se constată că pătratele razelor sînt în raportul 2:1 ($r'^2:r^2=2$).

A doua, mărginită în exterior de un segment de cerc mai mare decît un semicerc, avînd pătratele razelor în raportul 3:1 ($r'^2:r^2=3$).

A treia, este mărginită în exterior de un segment de cerc mai mic decît un semicerc, pătratele razelor fiind în raportul 3:2 ($r'^2:r^2=3:2$).

Scanned with OKEN Scanner

6. Problema generală a lunulelor cuadrabile

Din figura 66 se constată că lunula $ADBD'A$ este mărginită de arcele de cerc ADB, $AD'B$ ale cercurilor cu centrele 0, $0'$, de raze r, r' având unghiurile la centru 2α respectiv $2\alpha'$.

Dacă notăm cu L aria lunulei și cu P aria patrulaterului $AOBO'$, putem scrie următoarea relație între arii:

$$L=(ADBCA)-(AD'BCA)=(ADBOA)+P-(AD'BO'A).$$

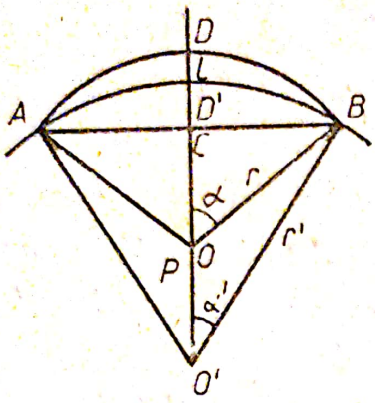


Fig. 66

$L=P$ implică

$$(ADBOA)=(AD'BO'A),$$

din care se obține:

$$r^2\alpha=r'^2\alpha'.$$

Dacă notăm $\alpha=k\alpha'$, rezultă

$$r'=r\sqrt{k}.$$

Din $\triangle BCO$ și $\triangle BCO'$ avem ecuația

$$CB=r\sin\alpha=\sqrt{r'}\sin\alpha',$$

$$\sin k\alpha'=\sqrt{k}\sin\alpha'.$$

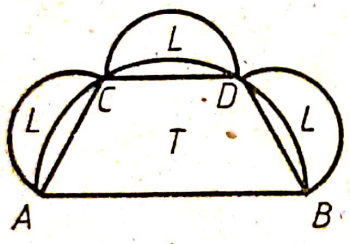


Fig. 67

N. Cebotarev[16] a demonstrat că ecuația obținută admite soluții ce pot fi construite cu rigla și compasul, numai pentru:

$$k=2,\ 3,\ 3/2,\ 5,\ 5/3.$$

Astfel, pentru $k=2$, se obține ecuația

$$\sin 2\alpha'=\sqrt{2}\sin\alpha',$$

care admite soluția $\cos\alpha'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha'=45°$, $\alpha=2\alpha'=90°$, $r'^2:r^2=2$, și corespunde primei lunule găsită de Hipocrat (fig. 61). Pentru $k=3$ și $k=3/2$ se obțin a doua și a treia lunulă cuadrabilă găsită tot de Hipocrat despre care am amintit mai sus. Ultimele două lunule cuadrabile obținute pentru $k=5$ și $k=5/3$ au fost găsite de M. Wallenius[17].

În afară de aceste 5 lunule cuadrabile singurele ce se pot construi (echivalente cu figuri plane mărginite de linii drepte), există și lunule care nu sînt cuadrabile.

Primul exemplu a fost dat de Hipocrat.

7. În semicercul de diametru $AB=2r$ se înscrie trapezul $ABCD$ în care $AC=CD=DB=r$, iar pe laturile AC, CD, DB, AB se construiesc semicercuri. Suma ariilor celor 3 lunule este egală cu aria trapezului mai puțin aria unuia dintre cele 3 semicercuri egale. Din figura 67 rezultă următoarea relație între arii:

[16] Nikolai Cebotarev (1894—1947), matematician sovietic.
[17] Martin Wallenius (1731—1773), matematician finlandez.

Scanned with OKEN Scanner

$$3L=3\frac{\pi r^2}{8}+T-\frac{\pi r^2}{2}=T-\frac{\pi r^2}{8}. \quad \text{(c.c.t.d.)}$$

Suma ariilor celor 3 lunule împreună cu aria unui semicerc mic este egală cu aria trapezului ($3L+\pi r^2:8=T$). Se pot construi multe lunule a căror arie împreună cu aria unui anumit sector circular să fie egală cu aria unui poligon.

8. Dacă înmulțim relația de mai sus cu 2 se obține $6L=E-\pi r^2/4$.

Aria celor 6 lunule mărginite de semicercurile descrise pe laturile hexagonului ca diametre și de cercul circumscris hexagonului, este egală cu aria hexagonului (E) din care se scade aria unuia din semicercurile mici (fig. 68).

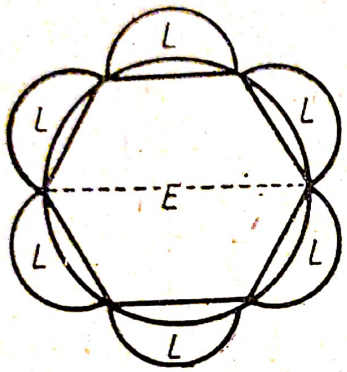


Fig. 68

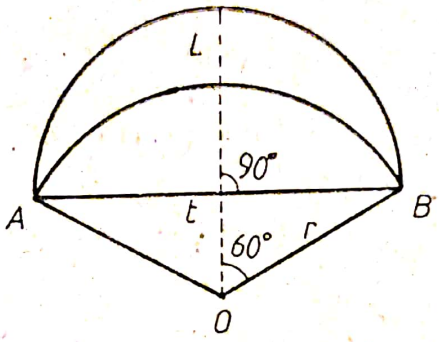


Fig. 69

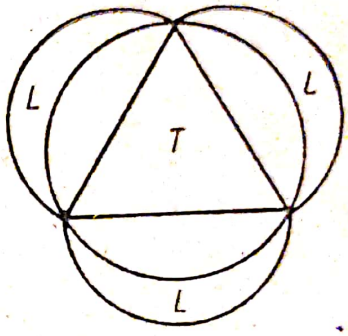


Fig. 70

9. Dacă $\alpha'=60°$, $\alpha=90°$ se obține lunula din figura 69 în care $OA=OB=r$, $AB=r\sqrt{3}$. Aria lunulei va fi:

$$L=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(r\sqrt{3})^2}{4}+t-\frac{\pi}{3}r^2=t+\frac{\pi r^2}{24}.$$

10. Dacă înmulțim cu 3 relația găsită se obține $3L=3t+S_c/8$.

Suma ariilor a 3 lunule mărginite de semicercurile descrise pe laturile unui triunghi echilateral și de cercul circumscris acestui triunghi este egal cu aria triunghiului mărită cu 1/8 din aria acelui cerc (fig. 70).

11. Pentru $\alpha'=36°$, $\alpha=90°$ se obține lunula din figura 71, aria ei va fi:

$$L=\frac{\pi l_5^2}{8}+T-\frac{\pi r^2}{5};\quad l_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$L=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{(10-2\sqrt{5})}{4}r^2-\frac{\pi r^2}{5}+T=T-\frac{5\sqrt{5}-9}{80}\cdot\pi r^2.$$

12. Dacă înmulțim cu 5 formula ariei acestei lunule, se obține

$$5L=5T-\frac{\pi}{16}(5\sqrt{5}-9)r^2;$$

$$5L=P-5\cdot S_c.$$

Suma ariilor celor 5 lunule mărginite de semicercurile de diametre egale cu laturile unui pentagon regulat și de cercul circumscris acestui pentagon este egală cu aria pentagonului (P), din care se scade $(5\sqrt{5}-9)/16$ din aria acelui cerc (fig. 72).

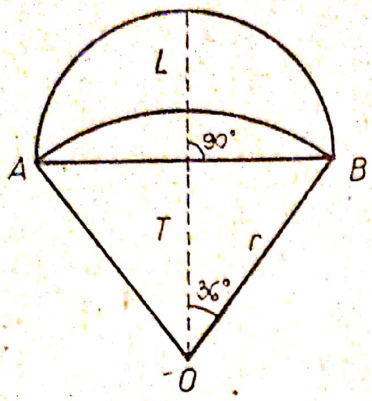


Fig. 71

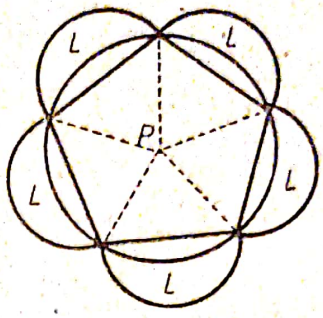


Fig. 72

În general, se pot construi lunele pentru orice poligon regulat (sau neregulat inscriptibil) care nu sînt cuadrabile, dar prezintă unele calități ornamentale ce pot fi utilizate în practică (ex. fig. 63, 65, 68, 70, 72, 73, 74).

$8L = P - \pi(1-\sqrt{2})r^2$

$12L = P - \frac{\pi}{2}(3\sqrt{3}-4)r^2$

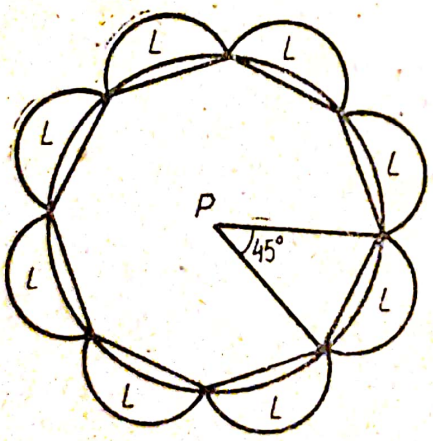


Fig. 73

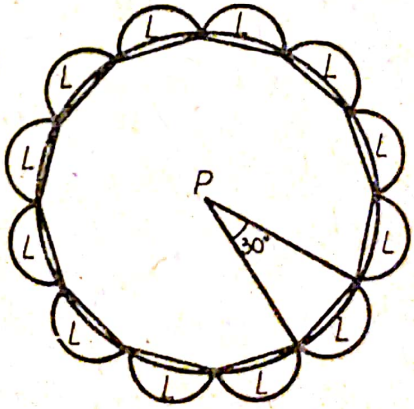


Fig. 74

b. Aplicații teoretice

1. Dacă C este un punct situat la mijlocul unui segment AB, iar M un punct oarecare pe acest segment, avem relația:

$$AM^2+MB^2=2AC^2+2CM^2. \qquad (1)$$

Această problemă a fost propusă și rezolvată de Euclid în *Elemente*, Cartea a II-a, teorema 9 și are următorul enunț: „Dacă se taie o linie dreaptă în segmente egale și neegale, pătratele segmentelor neegale ale întregului sînt

Scanned with OKEN Scanner

egale cu dublul pătratului jumătății și pătratul dreptei cuprinse între punctele de secțiune".

Demonstrație:

Ducem $CD \perp AB$ și luăm $CD=AC$, iar prin N ducem $NM \parallel CD$ și $NP \parallel AB$.

Rezultă:

$$DC=CA=CB, \quad \widehat{ADB}=90°, \quad \widehat{DAB}=\widehat{DBA}=45°,$$

$$DP=PN=CM, \quad \widehat{DPN}=90°, \quad \widehat{DNP}=\widehat{PDN}=54°,$$

$$MB=MN=CP, \quad \widehat{NMA}=90°, \quad \widehat{NBM}=\widehat{MNB}=45°.$$

Din figura 75 rezultă succesiv:

$$AM^2+MB^2=AM^2+MN^2$$

$$(MB=MN). \qquad (2)$$

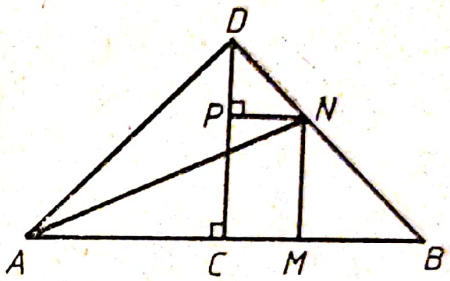


Fig. 75

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice AMN și AND.

$$AM^2+MN^2=AN^2=AD^2+DN^2.$$

Din triunghiurile dreptunghice ADC și NDP,

$$(\triangle ADC)\ldots AD^2=AC^2+DC^2=AC^2+AC^2=2AC^2.$$

$$(\triangle NDP)\ldots DN^2=DP^2+PN^2=2PN^2=2CM^2.$$

Relația (2) devine:

$$AM^2+MB^2=2AC^2+2CM^2 \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Observații. Teorema lui Pitagora a fost aplicată de patru ori (în triunghiurile dreptunghice, AMN, AND, ADC și NDP).

Dacă notăm $AM=a$, $MB=b$ și folosim notațiile algebrice actuale, relația cerută se poate obține din identitatea:

$$a^2+b^2=2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+2\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

din care rezultă:

$$AM^2+MB^2=2\left(\frac{AB}{2}\right)^2+2\left(AM-\frac{AB}{2}\right)^2,$$

$$AM^2+MB^2=2AC^2+2MC^2 \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Din figura 76 putem scrie următoarea relație între arii:

$$(AMP'C')+(MNM'B)=(AA''N''N)=(AA'C'D)+(DD'N'N)$$

din care, în baza teoremei lui Pitagora rezultă:

$$AM^2+MB^2=(AC^2+CD^2)+(PN^2+PD^2)=$$

$$=2AC^2+2CM^2 \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Rădăcina pozitivă a ecuației de gradul doi:

$$x^2+ax-m^2=0, \quad a>0$$

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+m^2},$$

se poate construi folosind teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul ABC, în care:

$$AB=\frac{a}{2}, \quad AC=m; \quad BC=\sqrt{\frac{a^2}{4}+m^2}.$$

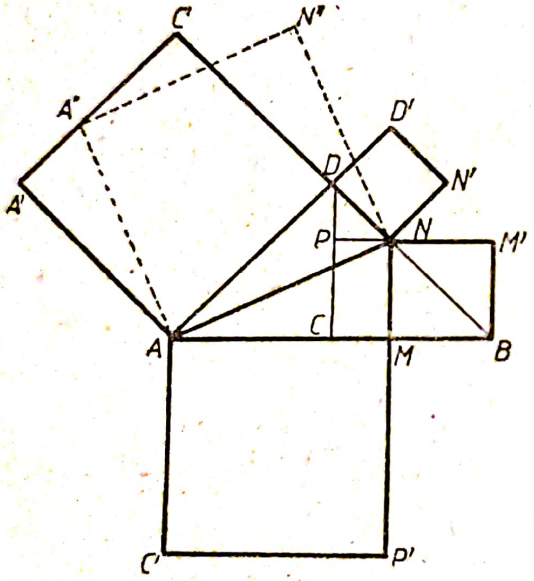


Fig. 76

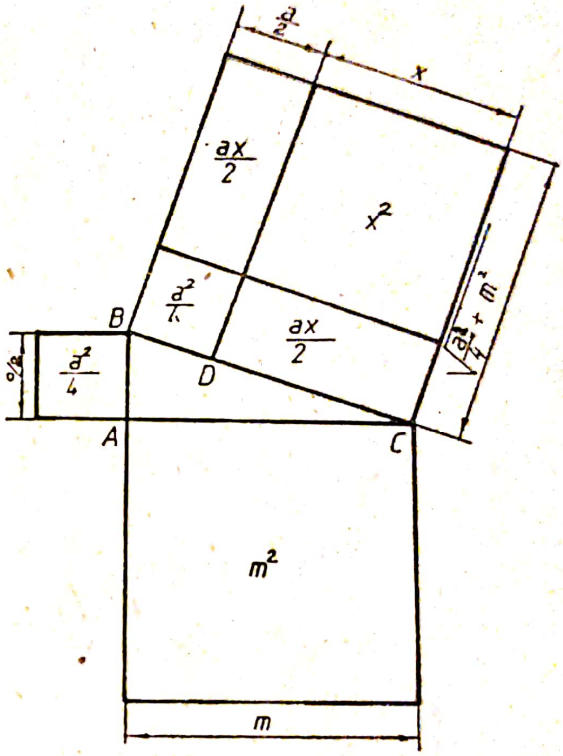


Fig. 77

Așa cum rezultă din figura 77, relația $BC^2=AB^2+AC^2$ devine

$$x^2+2\cdot\frac{ax}{2}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}+m^2, \quad x^2+ax-m^2=0.$$

Se construiește triunghiul dreptunghic ABC de catete m și $\frac{a}{2}$, iar pe ipotenuza BC se așează segmentul $BD=AB=\frac{a}{2}$. Segmentul $DC=BC-BD$ este soluția pozitivă a ecuației.

3. Să se determine un punct M pe o dreaptă dată AB, astfel că dreptunghiul cuprins de dreapta întreagă AB și segmentul AM să fie egal cu pătratul segmentului rămas MB.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Construim triunghiul dreptunghic ABC (fig. 78) de catete $AB=a$, $AC=\frac{a}{2}$, iar pe ipotenuza BC se așează segmentul $CD=AC=\frac{a}{2}$. Segmentul $MB=DB=BC-CD$ rezolvă problema.

Dacă notăm $AB=a$, $MB=x$, condiția problemei se scrie

$$AB\cdot AM=MB^2\Rightarrow a(a-x)=x^2;\quad x^2+ax-a^2=0,$$

$$x=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a}{2}=DB=BC-CD.$$

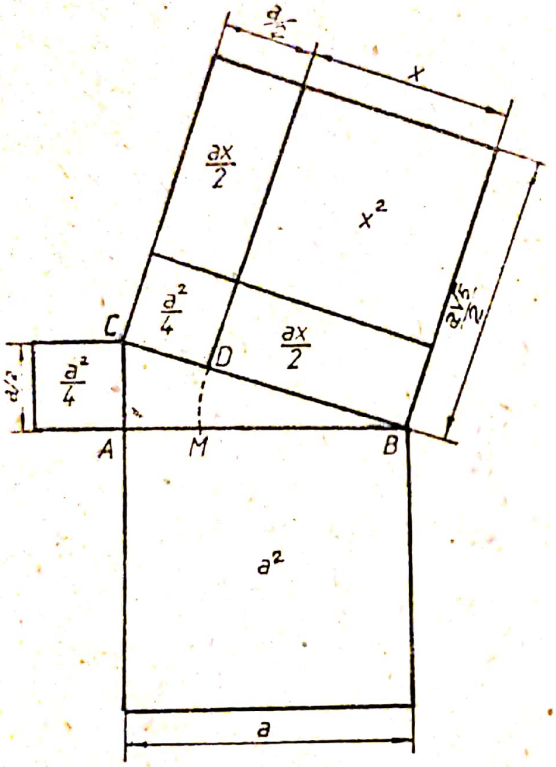


Fig. 78

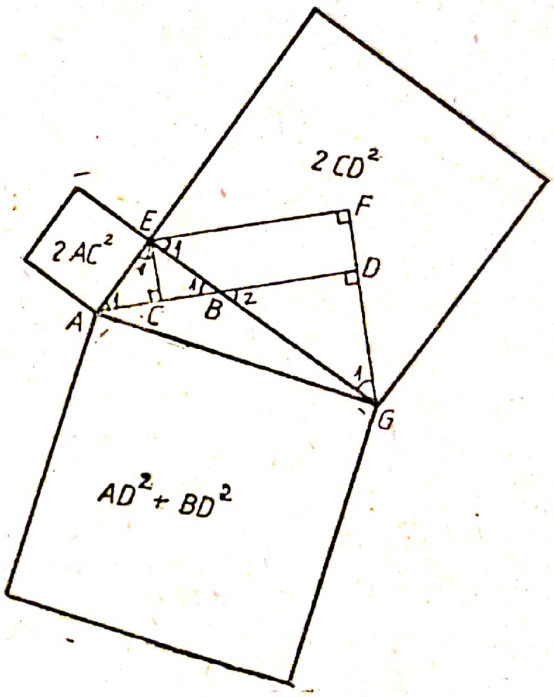


Fig. 79

Observații

— Această problemă se află rezolvată de Euclid pe cale geometrică în *Elemente*, cartea a II-a, teorema 11;

— Soluția problemei este necesară la înscrierea unui pentagon regulat într-un cerc. Ea a fost cunoscută de școala lui Pitagora. Pitagoreicii știau deci să rezolve geometric ecuația de gradul al doilea $x^2+ax-a^2=0$.

— Este un caz particular al problemei 2, în care $m=a$.

— Dacă $a=2$, ipotenuza $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

4. Dacă se înjumătățește o dreaptă oarecare AB în C, și i se adună în prelungire dreapta BD, pătratele lui AD și DB sînt egale cu dublul pătratelor lui AC și CD. (O soluție geometrică folosind teorema lui Pitagora a fost dată de Euclid în *Elemente*, cartea a II-a, teorema 10).

Folosind notațiile din figura 79, va trebui să arătăm că

$$AD^2+BD^2=2AC^2+2CD^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ducem $CE \perp AD$, $EF \parallel AD$ și $FD \perp AD$. Cum $AC=CD$ prin ipoteză, rezultă $\hat{E}_1=\hat{A}_1$ și $AC=EC$; $\hat{E}_1=\hat{G}_1$ și $FG=EF=CD$; $\hat{B}_2=\hat{G}_1$ și $BD=DG$. Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiurile ADG, AEC, EFG se obține:

$$\Delta ADG(\widehat{ADG}=90°)\ldots AD^2+BD^2=AD^2+DG^2=AG^2,$$

$$\Delta AEC(\widehat{ACE}=90°)\ldots 2AC^2=AC^2+AC^2=AC^2+EC^2=AE^2,$$

$$\Delta EFG(\widehat{EFD}=90°)\ldots 2CD^2=2EF^2=EF^2+FG^2=EG^2.$$

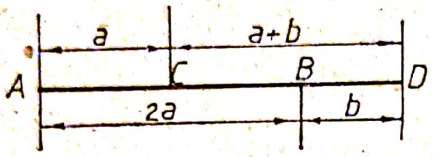


Fig. 80

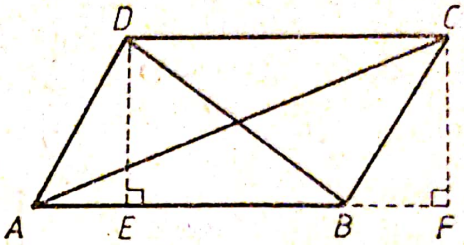


Fig. 81

Relația cerută devine:

$$AG^2=AE^2+EG^2,$$

evidentă în triunghiul dreptunghic $AEG(\widehat{AEG}=90°)$.

Observații

— Teorema lui Pitagora a fost aplicată de 4 ori (în triunghiurile dreptunghice ADG, AEC, EFG, AEG).

— Folosind notațiile din figura 80, relația cerută se reduce la egalitatea:

$$(2a+b)^2+b^2=2a^2+2(a+b)^2,$$

care se verifică oricare ar fi segmentele $AB=2a$, $BD=b$, $AC=a$, $CD=a+b$.

5. Într-un paralelogram, suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor.

Demonstrația 1.

În paralelogramul $ABCD$ prelungim AB și ducem $DE \perp AB$ și $CF \perp AF$. Din figura 81 se constată că:

$\triangle ACF\ldots AC^2=AF^2+CF^2=(AB+BF)^2+CF^2$,

$\triangle BDE\ldots BD^2=EB^2+DE^2=(AB-AE)^2+DE^2$.

Adunăm aceste relații și ținem seama că $AE=BF$ și $CF=DE$, $AC^2+BD^2=2AB^2+2AE^2+2DE^2=2AB^2+2(AE^2+DE^2)$.

Cum triunghiul ADE este dreptunghic în E, teorema lui Pitagora ne dă $AE^2+DE^2=AD^2$ și ultima relație devine $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ (c.c.t.d).

Demonstrația 2.

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ABD și ABC (fig. 81):

$\triangle ABD\ldots BD^2=AD^2+AB^2+2AB\times AE$, ($\widehat{BAD}$ ascuțit), $\triangle ABC\ldots AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BF$, ($\widehat{ABC}$ obtuz).

Scanned with OKEN Scanner

Adunăm aceste egalităţi şi ţinem seama că $AE=BF, BD^2+AC^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ (c.c.t.d).

Demonstraţia 3.

Se poate folosi teorema lui Pappus: suma pătratelor a două laturi ale unui triunghi este egală cu de două ori pătratul jumătăţii bazei plus de două ori pătratul dreptei care uneşte mijlocul bazei cu vîrful opus.

Demonstraţia acestei teoreme a fost dată de Pappus folosind teorema 10, cartea a II-a din *Elemente*, expusă mai sus (problema 4).

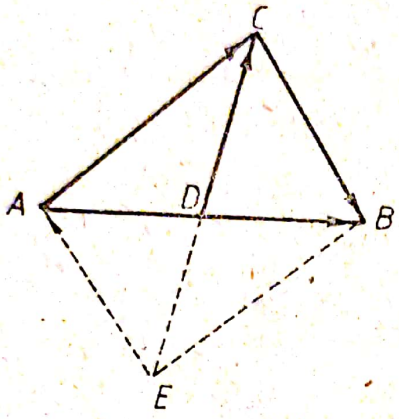


Fig. 82

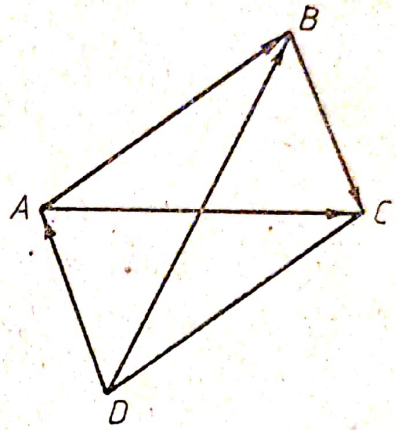


Fig. 83

Folosind notaţiile din figura 82, teorema lui Pappus se poate scrie:

$$AC^2+BC^2=2\left(\frac{AB}{2}\right)^2+2CD^2.$$

Dacă prelungim CD cu $DE=CD$ şi ducem $AE \parallel BC$, $BE \parallel AC$, se obţine paralelogramul $ACBE$.

Cum relaţia lui Pappus se mai poate scrie şi sub forma

$$2AC^2+2BC^2=AB^2+4CD^2,$$

iar $2CD=CE$, ea devine

$$AB^2+CE^2=AC^2+CB^2+BE^2+EA^2 \text{ (c.c.t.d).}$$

Demonstraţia 4.

Folosind calculul vectorial. Din figura 83 se constată că putem scrie:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC},$$

$$\overline{DA}+\overline{AB}=\overline{DB}.$$

Ridicăm la pătrat şi adunăm:

$$AB^2+BC^2+2AB\cdot BC\cos \widehat{ABC}+AD^2+AB^2+2DA\cdot AB\cos \widehat{DAB}=$$
$$=AC^2+DB^2.$$

Cum $\cos \widehat{DAB}=-\cos \widehat{ABC}$, relaţia de mai sus se scrie:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2 \text{ (c.c.t.d).}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație: În particular, propoziția 5 este adevărată într-un pătrat, dreptunghi și romb.

6. Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ cu diagonalele perpendiculare, avem relațiile:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2d^2, \tag{3}$$

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=d^2, \tag{4}$$

unde d este diametrul cercului.

Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cerc și $AC\perp BD$ (fig. 84).

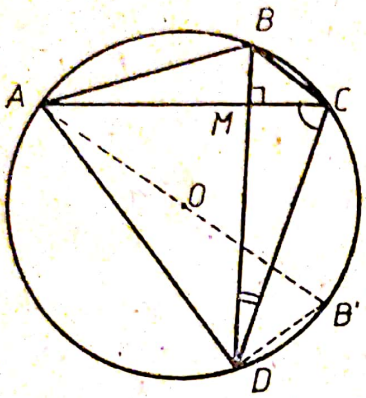


Fig. 84

Construim coarda $DB'=BC$. Cum $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DB'}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}=180°$, din $\triangle ADB'$ $(\widehat{ADB'}=90°)$, teorema lui Pitagora ne dă

$$AD^2+DB'^2=AD^2+BC^2=AB'^2=d^2. \tag{5}$$

În mod analog,

$$AB^2+DC^2=d^2. \tag{6}$$

Însumînd (5) cu (6) se obține (3) $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2d^2$ (c.c.t.d).

De asemenea, putem scrie:

$\triangle AMB \ldots AM^2+MB^2=AB^2$,

$\triangle BMC \ldots BM^2+MC^2=BC^2$,

$\triangle CMD \ldots CM^2+MD^2=DC^2$,

$\triangle DMA \ldots DM^2+MA^2=AD^2$.

Însumînd aceste relații găsim:

$$2(MA^2+MB^2+MC^2+MD^2)=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 \tag{7}$$

Dacă ținem seama de (3), relația (7) devine:

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=d^2 \text{ (c.c.t.d).}$$

În particular, relațiile (3) și (4) au loc și într-un pătrat, dreptunghi, trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare.

7. Cuțitul cojocarului (ἀρβηλοξ)

Fața acestui cuțit, folosit la curățarea pieilor, avea forma unei figuri limitate de trei semicercuri tangente două cîte două, cu centrele coliniare. Dacă notăm cu S aria acestei figuri se poate arăta că ea este egală cu aria cercului de diametru CD $(CD\perp AB)$. Din figura 85–86 se obține:

$$S=\frac{\pi}{8}AB^2-\frac{\pi}{8}AC^2-\frac{\pi}{6}CB^2=\frac{\pi}{8}(AB^2-AC^2-CB^2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $AB=AC+CB$; $AB^2=AC^2+2AC\cdot CB+CB^2$; $AB^2-AC^2-CB^2=2AC\cdot CB=2DC^2$, rezultă $S=\frac{\pi}{4}DC^2$ și reprezintă aria cercului de diametru CD (c.c.t.d).

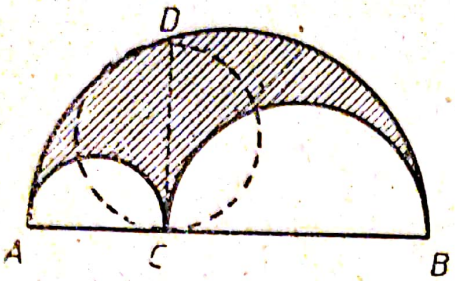


Fig. 85

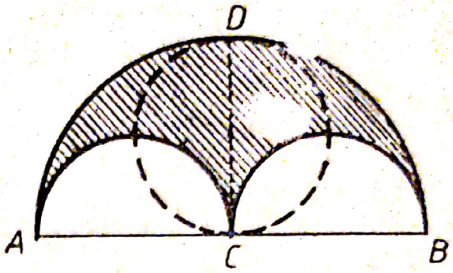


Fig. 86

8. Solnița romană (σάλινον), are forma unei emisfere cu un jgheab împrejur în formă de tor și cu un capac în formă de emisferă (fig. 87). Secțiunea axială (fig. 88) este delimitată de semicercul de diametru AB, semicercul de diametru CD construit în exterior și de semicercurile egale de diametre $AC=DB$, construite în interior.

Fig. 87

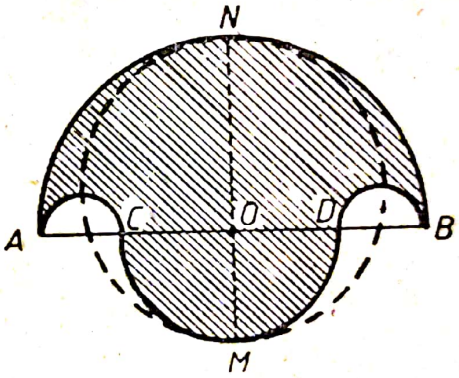


Fig. 88

Aria S a acestei secțiuni este egală cu aria cercului de diametru MN ($MN=NO+OM=AO+OD=AD$; $MN\perp AB$).

Din figura 88 se deduce:

$$S=\frac{\pi}{8}AB^2+\frac{\pi}{8}CD^2-2\frac{\pi}{8}AC^2=\frac{\pi}{8}(AB^2+CD^2-2AC^2).$$

Cum $AB=2AC+CD$; $AB^2=4AC^2+4AC\cdot CD+CD^2$, rezultă

$$S=\frac{\pi}{4}(AC^2+2AC\cdot CD+CD^2)=\frac{\pi}{4}(AC+CD)^2=\frac{\pi}{4}AD^2,$$

$$S=\frac{\pi}{4}MN^2 \qquad \text{(c.c.t.d)}.$$

Menționăm că, problemele 7 și 8 au fost tratate de Arhimede în *Cartea Lemelor* și fac parte din categoria problemelor distractive [30].

9. Relația lui Stewart. Dacă trei puncte A, B, C luate în această ordine, sînt situate pe o dreaptă și O un punct exterior dreptei (fig. 89), avem relația:

$$OA^2\cdot BC-OB^2\cdot AC+OC^2\cdot AB=AB\cdot BC\cdot AC.$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația 1.

Ducem $OD \perp AC$ și aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile AOB și OBC:

$$\triangle AOB \ldots OA^2 = AB^2 + OB^2 - 2AB \cdot DB \quad (\widehat{ABO} < 90°),$$

$$\triangle OBC \ldots OC^2 = OB^2 + BC^2 + 2BC \cdot DB \quad (\widehat{OBC} > 90°).$$

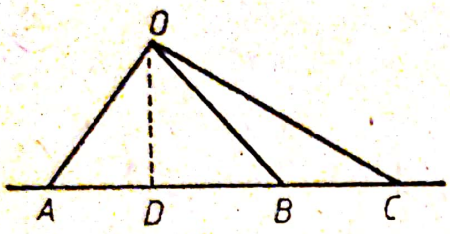


Fig. 89

Înmulțim prima relație cu BC, a doua cu AB și apoi le adunăm:

$$OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB = AB^2 \cdot BC +$$
$$+ OB^2 \cdot BC + OB^2 \cdot AB + BC^2 \cdot AB =$$
$$= OB^2(AB + BC) + AB \cdot BC(AB + BC) =$$
$$= OB^2 \cdot AC + AB \cdot BC \cdot AC.$$

$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC \text{ (c.c.t.d).}$$

Demonstrația 2.

Folosim teorema lui Pitagora aplicată în triunghiurile dreptunghice AOM, BOM, COM:

$$\begin{array}{l|l} \triangle AOM \ldots OA^2 = OM^2 + AM^2 & BC \\ \triangle BOM \ldots OB^2 = OM^2 + MB^2 & -AC \\ \triangle COM \ldots OC^2 = OM^2 + MC^2 & AB. \end{array}$$

Înmulțim prima relație cu BC, a doua cu $-AC$, a treia cu AB și adunăm:

$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB =$$
$$= OM^2(AB + BC - AC) + AM^2 \cdot BC - MB^2 \cdot AC + MC^2 \cdot AB =$$
$$= AM^2 \cdot BC + MC^2 \cdot AB - MB^2(AB + BC) =$$
$$= BC(AM^2 - MB^2) + AB(MC^2 - MB^2) =$$
$$= BC(AM + MB)\ (AM - MB) + AB(MC - MB)\ (MC + MB) =$$
$$= BC \cdot AB(AM - MB) + AB \cdot BC(MC - MB) =$$
$$= AB \cdot BC(AM - MB + MC - MB) =$$
$$= AB \cdot BC(AM + MC) = AB \cdot BC \cdot AC,$$
$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC \text{ (c.c.t.d).}$$

10. Latura și apotema triunghiului echilateral înscris în cerc.

Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul de rază R.

Se împarte cercul în 6 părți egale cu ajutorul razei, apoi unim punctele de diviziune din două în două. Se obține astfel triunghiul echilateral ABC înscris în cercul de rază R (fig. 90).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm $AB=l_3$, $AD=2R$, $BD=R$, $OE=a_3$, teorema lui Pitagora aplicată triunghiului ABD $(\widehat{ABD}=90°)$ ne dă:

$$AB^2=AD^2-BD^2,$$

$$l_3^2=4R^2-R^2=3R^2,$$

$$l_3=R\sqrt{3}.$$

Patrulaterul $OBDC$ fiind romb având toate laturile egale cu raza $(BO=CO=BD=CD)$, diagonalele se taie în părți egale, și deci,

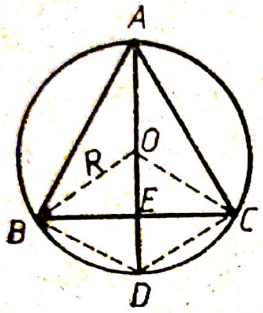


Fig. 90

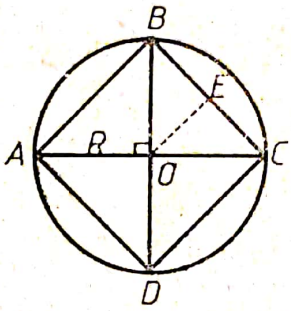


Fig. 91

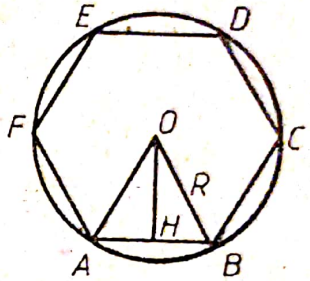


Fig. 92

$$OE=\frac{1}{2}OD, \quad a_3=\frac{R}{2}.$$

11. Latura și apotema pătratului înscris în cerc.

În cercul cu centrul O se duc două diametre perpendiculare $(AC\perp BD)$. Dacă notăm $AB=l_4$, $OE=a_4$, în triunghiul AOB (fig. 91) teorema lui Pitagora ne dă:

$$AB^2=AO^2+OB^2, \quad l_4^2=R^2+R^2=2R^2, \quad l_4=R\sqrt{2},$$

$$OE=\frac{1}{2}DC, \quad a_4=\frac{l_4}{2}; \quad a_4=\frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

12. Latura și apotema hexagonului regulat înscris în cerc.

Din figura 92 se constă că $\widehat{AOB}=60°$; $\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=60°$. Triunghiul AOB este echilateral și deci $AB=AO=BO=R$, $l_6=R$.

Dacă ducem $OH\perp AB$, din triunghiul AOH $(\widehat{AHO}=90°)$, teorema lui Pitagora ne dă:

$$OH^2=OA^2-AH^2, \quad a_6^2=R^2-\frac{R^2}{4}=\frac{3R^2}{4}, \quad a_6=\frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

13. Latura și apotema octogonului regulat înscris în cerc.

Din triunghiul dreptunghic ABD (fig. 93), teorema lui Pitagora ne dă:

$$AB^2=AD^2+BD^2, \quad l_8^2=\left(\frac{l_4}{2}\right)^2+\left(R-\frac{a_4}{2}\right)^2=\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(R-\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

$$l_8^2=\frac{2R^2}{4}+R^2\left(1-\sqrt{2}+\frac{2R^2}{4}\right)=R^2(2-\sqrt{2}).$$

$$l_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

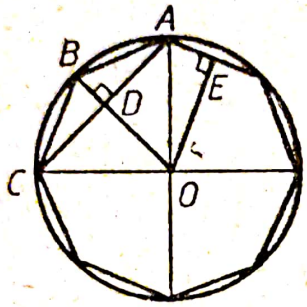


Fig. 93

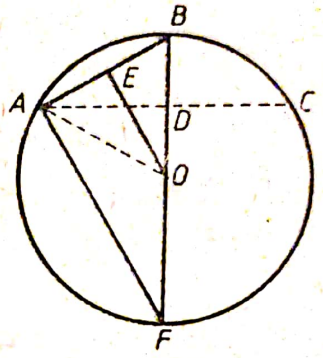


Fig. 94

Din triunghiul dreptunghic AOE ($\widehat{AEO}=90°$), se obține:

$$OE^2=AO^2-AE^2; \quad a_8^2=R^2-\left(\frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=R^2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right).$$

$$a_8=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

14. Cunoscînd latura și apotema unui poligon regulat înscris într-un cerc, să se calculeze latura și apotema poligonului regulat înscris în același cerc, cu un număr dublu de laturi.

Folosind notațiile (fig. 94):

$$AC=l_n; \quad OD=a_n; \quad AB=l_{2n}; \quad OE=a_{2n}; \quad BO=OF=R.$$

Calculul laturii (l_{2n})

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABD ($\widehat{ADB}=90°$).

$AB^2=AD^2+BD^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+(BO-OD)^2$. Dar $AC=l_n$, $BO=R$,

iar din triunghiul dreptunghic AOD, găsim $OD^2=AO^2-AD^2=R^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2$, relația de mai sus se scrie:

$$l_{2n}^2=\left(\frac{l_n}{2}\right)^2+\left(R-\sqrt{R^2-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}\right)^2=2R^2-R\sqrt{4R^2-l_n^2}.$$

$$l_{2n}=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-l_n^2})}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculul apotemei (a_{2n})

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OBE ($\widehat{OEB}=90°$).

$$OE^2=OB^2-BE^2=R^2-\left(\frac{l_{2n}}{2}\right)^2=R^2-\frac{1}{2}(2R^2-\sqrt{4R^2-l_n^2})$$

$$a_{2n}=\frac{1}{2}\sqrt{R(2R+\sqrt{4R^2-l_n})}.$$

15. Puterea unui punct față de un cerc.

Prin definiție, puterea unui punct P față de cercul cu centrul O și rază R se notează cu ρ și este egală cu pătratul tangentei duse din acel punct la cerc (fig. 95).

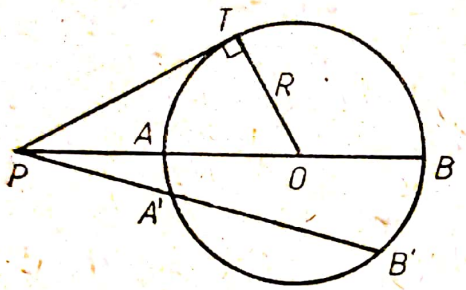


Fig. 95

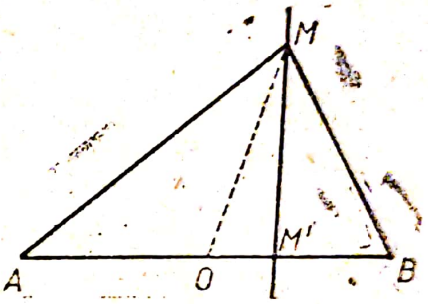


Fig. 96

Din triunghiul POT dreptunghic în T se obține

$$\rho=PT^2=PO^2-OT^2=d^2-R^2=PA\cdot PB=PA'\cdot PB'=\ldots$$

Dacă P este exterior cercului $d>R$, $\rho=d^2-R^2>0$, dacă P este pe cerc $d=R$, $\rho=d^2-R^2=0$, dacă P este interior cercului $d<R$, $\rho=d^2-R^2<0$.

16. Locul geometric al punctelor M pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe A și B este constantă, este perpendiculara dusă din M pe dreapta AB (fig. 96).

Prin ipoteză $MA^2-MB^2=c^2$ (constant). Fie M' piciorul perpendicularei duse din M pe AB și O mijlocul segmentului AB.

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile MAO și MOB:

$$MA^2=AO^2+MO^2+2AO\cdot OM',\quad MB^2=BO^2+MO^2-2BO\cdot OM'.$$

Scădem aceste relații și ținem seama că $AO=OB$.

$$MA^2-MB^2=4AO\cdot OM'=2AB\cdot OM'=c^2.$$

Rezultă $OM'=c^2:2AB=$ constant și deci punctul $M'=$este fix.

Locul căutat este perpendiculara ridicată în M' pe dreapta AB astfel că $OM'=c^2:2AB$. Exemplu, dacă $AB=4$ și $c=4$; $OM'=OB=2$, locul este perpendiculara în B pe AB.

17. Se dă semicercul de diametru $AB=2r$ cu centrul O și semicercul $AO=r$ cu centrul O_1. Se cere raza cercului tangent celor două semicercuri și

diametrului AB (fig. 97). Folosim notațiile $O_1O = O_1D = \frac{r}{2}$, $O_2C = O_2D = O_2E = x$, $OC = y$, $OA = OB = OE = r$, $OO_2 = OE - O_2E = r - x$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice O_1O_2C și OO_2C ($\widehat{OCO_2} = 90°$, deoarece $O_2C \perp OB$).

$$\triangle O_1O_2C \ldots O_1O_2^2 = O_1C^2 + O_2C^2 \ldots \left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{r}{2} + y\right)^2 + x^2,$$

$$\triangle OO_2C \ldots OO_2^2 = OC^2 + O_2C^2 \ldots (r - x)^2 = y^2 + x^2.$$

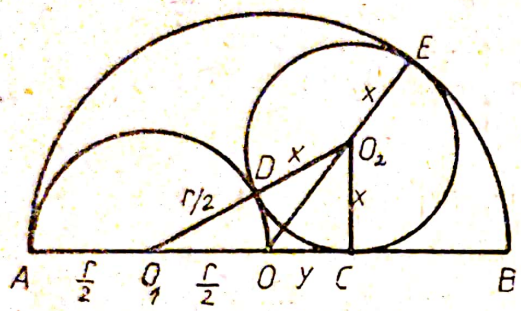


Fig. 97

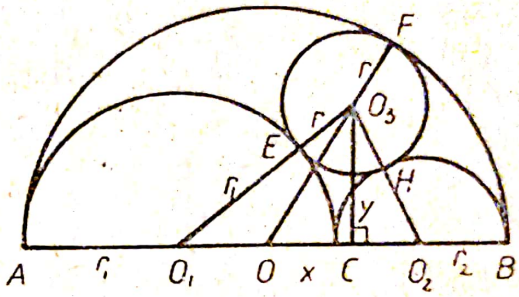


Fig. 98

Se obține sistemul de două ecuații:

$$rx - ry = y^2,$$

$$r^2 - 2rx = y^2,$$

ale cărui soluții sînt $x = \frac{4}{9}r$ și $y = \frac{1}{3}r$.

Se construiește $OC = y = \frac{r}{3}$, se ridică în C o perpendiculară pe care se ia $CO_2 = \frac{4}{9}r$. Punctul O_2 este centrul cercului cerut (tangent în E și D la semicercurile cu centrele O, O_1 și diametrului AB în C).

18. Se dă semicercul de diametru AB cu centrul O, tangent semicercurilor de raze $AO_1 = r_1$; $O_2B = r_2$ tangente între ele.

Să se construiască un cerc tangent celor 3 semicercuri O, O_1 și O_2.

Ducem $O_3C \perp AB$, unim O cu F și folosim notațiile:

$$AO_1 = O_1E = r_1; \quad O_2B = O_3H = O_3F = r; \quad AO = OB = OF = r_1 + r_2;$$

$$OC = x; \quad O_3C = y; \quad O_1O = AO - AO_1 = r_1 + r_2 - r_1 = r_2;$$

$$O_1C = r_2 + x; \quad O_2C = r_1 + r_2 - r_2 - x = r_1 - x.$$

Din figura 98 obținem relațiile:

$$OO_3 = OF - O_3F = r_1 + r_2 - r; \quad O_1O_3 = O_1E + EO_3 = r_1 + r;$$

$$O_2O_3 = O_2H + HO_3 = r_2 + r.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice OO_3C, O_1O_3C, O_1O_3C se obține sistemul de ecuații:

$$\triangle OO_3C \ldots OO_3^2 = OC^2 + O_3C^2 \ldots (r_1 + r_2 - r)^2 = x^2 + y^2,$$

$$\triangle O_1O_3C \ldots O_1O_3^2 = O_1C^2 + O_3C^2 \ldots (r_1 + r)^2 = (r_2 + x)^2 + y^2,$$

$$\triangle O_2O_3C \ldots O_2O_3^2 = O_2C^2 + O_3C^2 \ldots (r_2 + r)^2 = (r_1 - x)^2 + y^2,$$

și are soluția:

$$x = \frac{(r_1+r_2)^2(r_1-r_2)}{r_1^2+r_1r_2+r_2^2};\quad y = \frac{2r_1r_2(r_1+r_2)}{r_1^2+r_1r_2+r_1^2};\quad r = \frac{r_1r_2(r_1+r_2)}{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}.$$

Pentru a construi cercul cerut se determină punctul C dat de relația $OC = x$, apoi se duce $CO_3 \perp AB$, unde $CO_3 = y$. Din punctul O_3 astfel obținut se duce cercul de rază $O_3F = r = \frac{y}{2}$.

19. Pe laturile unui pătrat $ABCD$ de latură a (fig. 99) se iau segmentele $BM = \frac{2a}{3}$, $CN = ax$. Să se determine x astfel ca triunghiul AMN să fie dreptunghic în M.

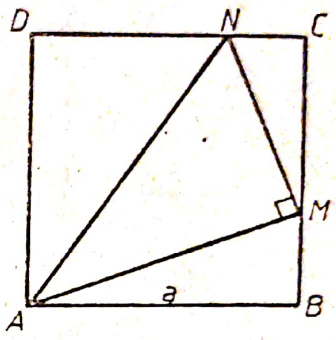


Fig. 99

Vom avea $BM = \frac{2}{3}a$, $MC = \frac{1}{3}a$, $NC = ax$, $DN = a - ax = a(1-x)$.

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiurile AMB, MNC, ADN:

$$\triangle AMB \ldots AM^2 = AB^2 + MB^2;$$

$$AM^2 = a^2 + \frac{4}{9}a^2 = \frac{13}{9}a^2;$$

$$\triangle MNC \ldots MN^2 = MC^2 + NC^2;$$

$$MN^2 = \frac{1}{9}a^2 + a^2x^2 = \frac{1}{9}(1+9x^2)a^2;$$

$$\triangle ADN \ldots AN^2 = AD^2 + DN^2;$$

$$AN^2 = a^2 + a^2(1-x)^2.$$

În baza teoremei reciproce a lui Pitagora, triunghiul AMN va fi dreptunghic în M dacă vom avea satisfăcută condiția:

$$AN^2 = AM^2 + MN^2.$$

Se obține ecuația:

$$a^2 + a^2(1-x^2)^2 = \frac{13}{9}a^2 + \frac{1}{9}(1+9x^2)a^2;$$

$$x = \frac{2}{9};\quad NC = \frac{2}{9}a;\quad DN = \frac{7}{9}a;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$AM^2=\frac{13}{9}a^2;\ MN^2=\frac{13}{81}a^2;\ AN^2=\frac{130}{81}a^2.$$

Se constată ușor că relația lui Pitagora este satisfăcută.

20. Dacă suma a două numere variabile este constantă, produsul lor este maxim cînd numerele sînt egale.

Demonstrație. Pe diametrul AB al unui semicerc de rază constantă R, se ia un punct arbitrar M și se duce $MP\perp AB$ (fig. 100). Dacă notăm $AM=x$, $MB=y$, va trebui să găsim maximul produsului xy știind că

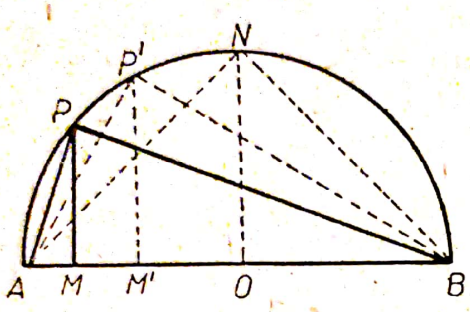


Fig. 100

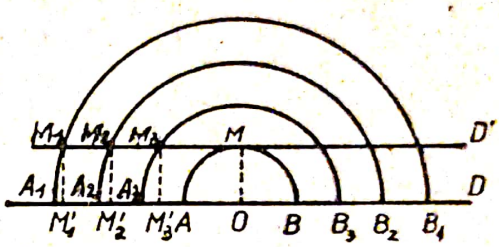


Fig. 101

$AM+MB=x+y=2R=$constant. Folosind teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic APM, produsul $xy=AM\cdot MB=MP^2$ va fi maxim cînd MP va fi maxim, adică atunci cînd P ajunge în N. Dar, în acest caz, M se confundă cu O și deci $x=y=R$.

Rezultă că, dacă $x+y=2R$, max. $xy=R^2$ și are loc atunci cînd $x=y=R$ (c.c.t.d).

21. Dacă suma pătratelor a două numere variabile este constantă, produsul lor este maxim, dacă numerele sînt egale.

Demonstrație. Dacă notăm $AP=x$, $PB=y$, $AB=2\,OA=2R$, din figura 100 se obține $x^2+y^2=AB^2=4R^2=$constant.

Produsul $x\cdot y=AP\cdot PB=AB\cdot PM$ va fi maxim cînd PB va fi maxim, deci cînd P va coincide cu N. Dar, în acest caz $AN=NB$; $x=y$. Se obține max. $xy=AB\cdot NO=2R\cdot R=2R^2$. Dacă suma pătratelor a două numere variabile este constantă ($x^2+y^2=4R^2$), produsul lor este maxim dacă numerele sînt egale $x=y=R\sqrt{2}$, max. $xy=2R^2$ (c.c.t.d).

22. Dacă produsul a două numere variabile este constant, suma lor este minimă dacă numerele sînt egale.

Demonstrație.

În fasciculul de semicercuri concentrice cu centrul O se duce secanta D', paralelă cu diametrul D (fig. 101). Din punctele de intersecție M_1, M_2, M_3,...M se coboară perpendicularele $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, $M_3M'_3$,...,MO pe diametrul D.

Teorema înălțimii aplicată triunghiurilor dreptunghice $A_1M_1B_1$, $A_2B_2M_2$ ...,AMB ne permite să scriem

$$M_iM'^2_i=A_iM'_i\cdot M'_iB_i=OM^2=\text{constant.}\quad (i=1,\,2,\,3,\ldots)$$

Cum $A_iM_i' \cdot M_i'B_i = OM^2 = \text{constant}$, suma $A_iM_i' + M_i'B_i = A_iB_i$ va fi minimă cînd punctul M_i coincide cu M (semicercul devine tangent dreptei D'). Dar, în acest caz, M_i' coincide cu centrul O și $AO = OB$, deci cele două mărimi devin egale.

Dacă folosim notațiile $A_iM_i' = x$, $M_i'B_i = y$, $OM = r$, putem spune că, dacă produsul a două numere variabile este constant $(x \cdot y = r^2)$, suma $x + y$ este minimă, dacă numerele sînt egale $x = y = r$ (c.c.t.d).

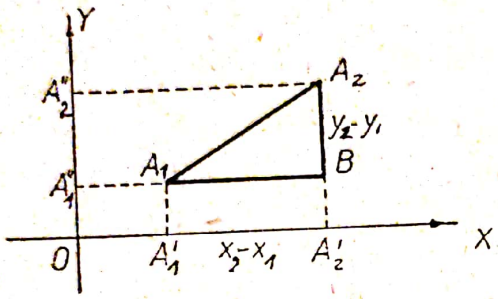


Fig. 102

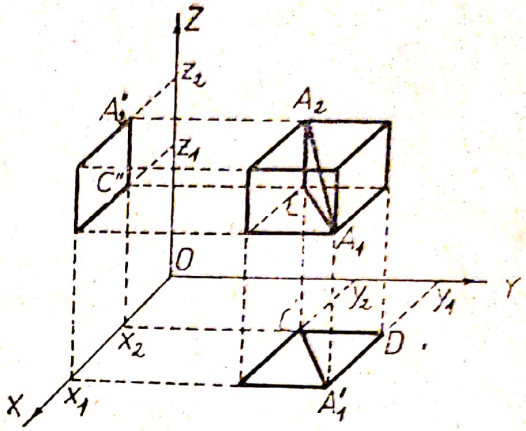


Fig. 103

23. Distanța dintre două puncte.

— Fie $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$ două puncte situate *în plan*, raportate la un sistem de două axe ortogonale Ox, Oy (fig. 102). Dacă notăm $d = A_1A_2$, distanța dintre cele două puncte, din figura 102 se constată că:

$$A_1B = A_1'A_2' = OA_2' - OA_1' = x_2 - x_1;$$

$$A_2B = A_2''A_1'' = OA_2'' - OA_1'' = y_2 - y_1.$$

Teorema lui Pitagora aplicată triunghiului dreptunghic $A_1A_2B\,(\hat{B} = 90°)$, ne dă

$$A_1A_2^2 = A_1B^2 + A_2B^2, \ldots, d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

— Fie $A_1(x_1, y_1, z_1)$ și $A_2(x_2, y_2, z_2)$, două puncte situate *în spațiu*, raportate la un sistem de trei axe ortogonale ox, oy, oz. Din figura 103 se constată că:

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + A_2C^2 = C'A_1''^2 + A_2''C''^2 = A_1'D^2 + C'D^2 + A_2''C''^2 =$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

— Fie $A_1\,(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $A_2\,(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$, două puncte situate *în spațiul* $\mathbf{R}^n$, raportate la un sistem cartezian ortogonal. Prin analogie cu situația din $\mathbf{R}^2$ și $\mathbf{R}^3$, distanța dintre cele două puncte va fi:

$$d = \sqrt{(x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 + \ldots + (x_{1n} - x_{2n})^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

24. Nomogramă pentru teorema lui Pitagora.

Cuvîntul NOMOGRAFIE este compus din cuvintele greceşti νομοσ (nomos) care înseamnă lege şi γραφειν (grafein) — a scrie, iar nomograma este o reprezentare geometrică a unei relaţii funcţionale între două, trei sau mai multe variabile. Scopul esenţial al nomogramelor a fost şi a rămas acelaşi de la începutul existenţei lor, cel mai simplu şi mai ieftin auxiliar de calcul.

Economia de timp realizată prin folosirea lor este apreciabilă, iar faptul că ele pot fi mînuite cu uşurinţă chiar şi de nespecialişti constituie o mare calitate a acestora.

Menţionăm de asemenea, cu privire la gradul de precizie, că se pot construi astăzi nomograme nu numai cu una sau două, ci chiar cu trei sau cu patru cifre semnificative exacte, ceea ce satisface cu prisosinţă necesităţile practice cele mai exigente, este vorba de nomogramele de mare precizie.

Nomografia este o disciplină care aparţine matematicii aplicate şi datează relativ de scurt timp.

Primele nomograme apărute abia la începutul secolului al XIX-lea au fost „nomogramele reticulare“ care şi astăzi sînt cele mai cunoscute şi mai larg răspîndite.

Un alt gen de nomograme este acela elaborat de matematicianul francez Maurice d'Ocagne la sfîrşitul secolului al XIX-lea şi se numesc nomograme cu puncte aliniate, scări paralele (sau concurente), echidistante (sau nu) şi cu gradaţie uniformă (sau neuniformă).

Pentru a determina pe x, y sau z din relaţia lui Pitagora

$$z^2=x^2+y^2,$$

cu ajutorul unei nomograme se scrie această relaţie sub forma:

$$\frac{z^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2} \text{ şi se compară cu } Z=\frac{Y+X}{2};$$

se obţine:

$$Z=\frac{z^2}{2}, \quad X=x^2, \quad Y=y^2.$$

Folosind aceste egalităţi, scările lui x, y, z se vor grada, dînd acestor variabile valorile întregi 1, 2, 3, ... şi calculînd valorile corespunzătoare lui X, Y, Z.

Se vor obţine următoarele tabele care permit gradarea celor trei scări (fig. 104):

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
X	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196

Scanned with OKEN Scanner

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Z	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32	40,5	50	60,5	72	84,5	98

Pentru scara valorilor lui x și y se vor măsura începînd din A, respectiv B segmentele 1, 4, 9, 16, 25,..., 196 mm și se vor scrie în dreptul lor 1, 2, 3, 4,...,14.

Pentru scara valorilor lui z se vor măsura începînd din C segmente de 0,5; 2; 4,5; 8; 12,5,...,98 mm și se vor scrie în dreptul lor 1, 2, 3, 4,...,14.

În figura 104, scările Ax și By au fost gradate de la 1 la 10, iar scara Cz de la 1 la 14;

Exemple. Se dă $x_1=8,5$; $y_1=7,6$; ipotenuza $z_1=11,4$ se va citi direct pe nomogramă în punctul de intersecție al dreptei x_1y_1 cu scara Cz.

— Se dă $z_2=11,8$; $x_2=8,9$; cateta $y_2=7,7$ se citește pe scara By în punctul de intersecție al dreptei x_2z_2 cu această scară.

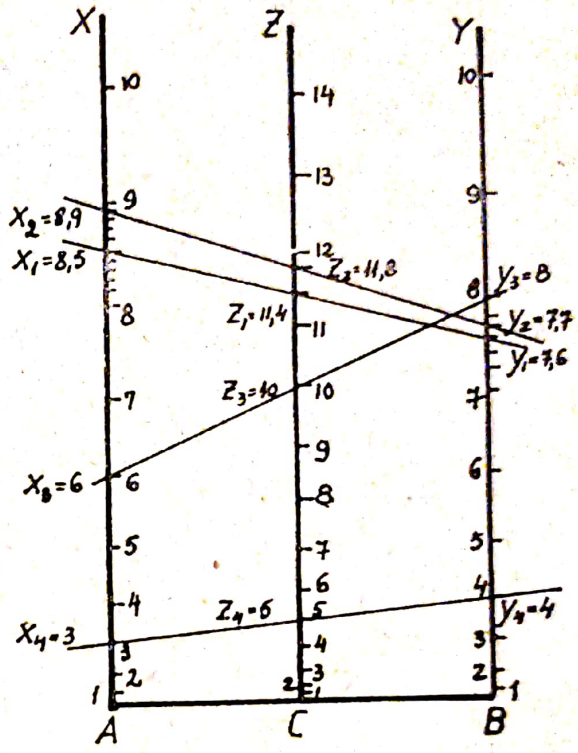


Fig. 104

Observații.

— Se constată că diviziunile intermediare nu se pot obține prin împărțirea în părți egale.

— Această nomogramă are gradații neuniforme, valorile lui x, y, z nu sînt nici egale și nici proporționale cu valorile lui X, Y, Z.

— O astfel de nomogramă se numește cu puncte aliniate, scări paralele echidistante și gradație neuniformă.

— Rezultatele obținute cu această nomogramă ne dau valori exacte pentru primele două (uneori chiar trei) cifre semnificative exacte.

c. Aplicații practice

1. Două orașe A și B sînt situate la a km și respectiv b km de un rîu rectiliniu, iar proiecția segmentului AB este de d km. Cele două orașe trebuie alimentate cu apă de la o uzină care urmează să fie construită pe marginea rîului. Se cere poziția de amplasare a uzinei astfel încît lungimea conductelor care leagă cele două orașe cu uzina să fie minimă (fig. 105).

Soluție. Se cere poziția punctului D situat pe malul rîului, astfel încît suma $AD+DB$ să fie minimă.

Cum $AD=A'D$ (A' simetricul lui A față de dreapta ox), min. $(AD+DB)=$min. $(A'D+DB)=A'B$.

Scanned with OKEN Scanner

Construcția punctului D este simplă. Prelungim OA și luăm $OA'=OA$, apoi unim A' cu B (deoarece distanța cea mai scurtă dintre A' și B este segmentul de dreaptă $A'B$). Punctul D de intersecție al dreptei $A'B$ cu OB' este punctul căutat (fig. 105).

Aplicînd teorema lui Pitagora în $\triangle A'BC$ se obține:

$$A'B^2=A'C^2+BC^2=A'C^2+(BB'+B'C)^2=d^2+(b+a)^2;$$

$$\text{min. } (AD+DB)=A'B=\sqrt{(a+b)^2+d^2}.$$

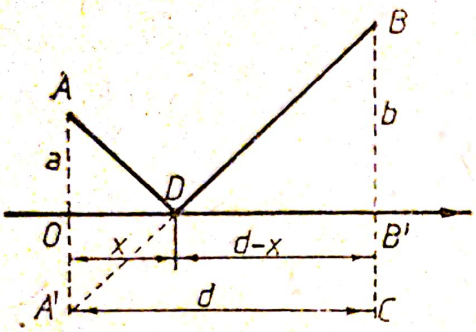


Fig. 105

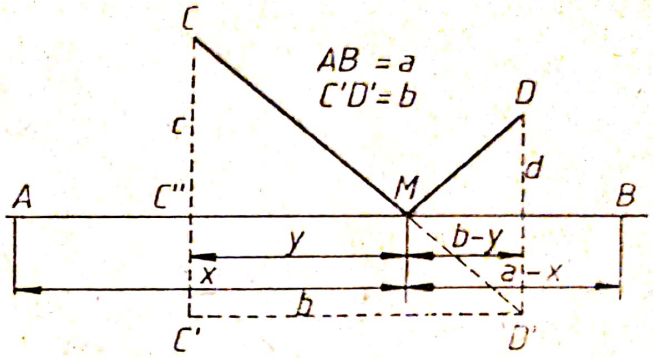


Fig. 106

Cum $\triangle OAD \sim \triangle BB'D$, vom putea scrie:

$$\frac{AO}{BB'}=\frac{OD}{DB'},\ \ldots,\ \frac{a}{b}=\frac{x}{d-x},\ \ldots,\ \frac{a+b}{a}=\frac{d}{x},\ \ldots,\ x=\frac{ad}{a+b}.$$

Exemplu. Dacă $a=10$ km, $b=15$ km, $d=20$ km, se va găsi $x=$

$$=\frac{10\cdot 20}{10+15}=\frac{200}{25}=8 \text{ km};\quad A'B=\sqrt{(10+15)^2+20^2}=$$

$$=\sqrt{1025}\cong 32{,}015 \text{ km}.$$

În consecință, min. $(AD+DB)\cong 32{,}015$ km și se va obține dacă uzina va fi amplasată la distanța $OD=8$km (O fiind proiecția lui A pe albia rîului).

2. De-a lungul unei șosele rectilinii se află două șantiere de construcții A, B la distanța $AB=a$. La distanțele c și d de șosea se mai află două șantiere C și D, astfel ca $C'D'=b$ (fig. 106).

Se cere poziția M de amplasare a unui depozit de materiale de-a lungu șoselei, astfel încît suma distanțelor lui la cele 4 șantiere A, B, C, D să fie minimă.

Soluție. Dacă notăm $AM=x$, $MB=a-x$, $C'M=y$, $MD'=b-y$, se cere min $(AM+MB+CM+MD)=\min(x+a-x+CM+MD)=\min(a+CM+MD)=a+\min(CM+MD)$. Dar min $(CM+MD)$ se obține unind pe C cu D' (ca în problema 1).

Aplicînd teorema lui Pitagora în $\triangle CC'D'$ se obține: $\min(AM+MB+CM+MD)=a+\sqrt{b^2+(c+d)^2}$, iar poziția M de amplasare a depozitului va fi $C''M=y=bc:(c+d)$.

Exemplu. Dacă $a=800$ m, $b=600$ m, $c=500$, $d=300$ m, se obține $C''M=y=bc:(b+c)=600\cdot 500:(500+300)=375$ m, $\min(AM+MB+CM+MD)=800+\sqrt{600^2+800^2}=1800$ m.

Scanned with OKEN Scanner

3. O uzină electrică U se află pe marginea unui rîu de lățime a km. Pe marginea opusă acestui rîu se află o fabrică la distanța b km față de proiecția U' a locului unde se află uzina electrică (fig. 107).

Cum este mai economic să se instaleze un cablu care leagă uzina cu fabrica, știind că pe mal, costul instalației cablului este m lei/km, iar prin apă este n lei/km $(m<n)$.

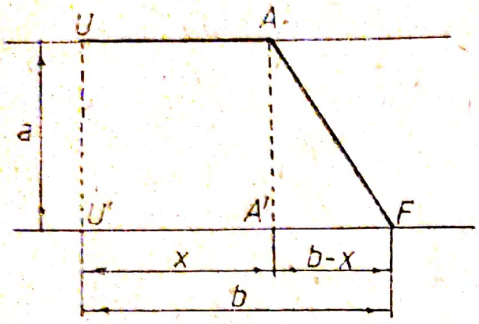


Fig. 107

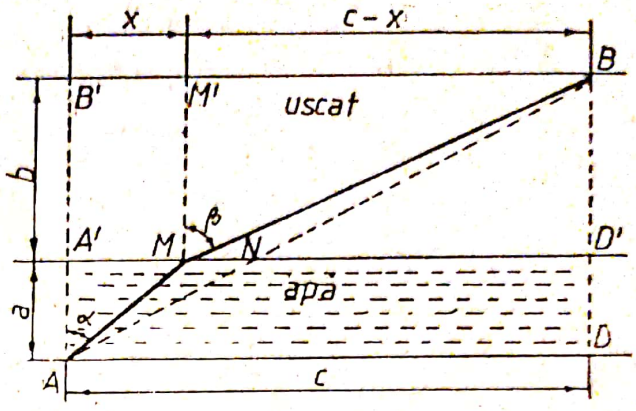


Fig. 108

Soluție. Dacă notăm cu x lungimea cablului pe pămînt de la U la A $(AA'=a;\ U'F=b;\ UA=U'A'=x)$, iar din triunghiul dreptunghic $AA'F$ se obține:

$$AF^2=AA'^2+A'F^2=a^2+(b-x)^2;$$

$$AF=\sqrt{a^2+(b-x)^2}.$$

Funcția care trebuie minimizată, care reprezintă costul instalației cablului de la U la A și de la A la F va fi:

$$C(x)=m\cdot UA+n\cdot AF=mx+n\sqrt{a^2+(b-x)^2}.$$

Anulînd prima derivată se obține:

$$x=b-am:\sqrt{n^2-m^2};\ \min C=mb+a\sqrt{n^2-m^2};\ n>m.$$

Dacă $m=n$, $\min C=m\ UF=m\sqrt{a^2+b^2}$, cablul va fi instalat pe distanța cea mai scurtă de la U la F.

Exemplu. Dacă $a=500$ m; $b=4$ km; $m=6\,000$ lei/km; $n=10\,000$ lei/km se obține:

$$C_{\min}=6000\cdot 4+0{,}5\sqrt{10^8-6^2\cdot 10^6}=28\,000 \text{ lei};$$

$$x=UA=3625 \text{ m}.$$

4. Pe malul unui rîu de lățime a se află o uzină electrică A. În partea opusă a rîului se află o fabrică B la distanța b de malul opus și la distanța c de proiecție B' a locului unde se află uzina A (fig. 108).

Cum este mai economic să se instaleze un cablu care leagă uzina A cu fabrica B, știind că pe uscat costul instalației este m lei/km, iar prin apă n lei/km $(m<n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Folosind notațiile din figura 108, funcția al cărei minim se caută va fi:[18]

$$C(x)=n\cdot AM+m\cdot MB=n\sqrt{a^2+x^2}+m\sqrt{b^2+(c-x)^2}.$$

Egalînd prima derivată cu zero se obține:

$$nx\sqrt{b^2+(c-x)^2}=m(c-x)\sqrt{a^2+x^2},\ \text{echivalentă cu relația}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{m}{b};\ \sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}};\ \sin\beta=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Deci, costul minim al instalației se va realiza atunci cînd sinusurile unghiurilor formate de direcțiile celor două conducte, AM și BM cu perpendicularele duse pe malul rîului în A și M sînt invers proporționale cu prețurile de cost unitare ale conductelor instalate pe aceste direcții:
$\min C=n\sqrt{a^2+x^2}+m\sqrt{b^2+(c-x)^2}$, unde x este soluția pozitivă a ecuației:

$$n^2x^2[b^2+(c-x)^2]=m^2(c-x)^2\cdot(a^2+x^2).$$

Exemplu. Pentru $a=2$ km, $b=3$ km, $c=7$ km, $n=2$ m, ecuația de mai sus devine

$$3x^4-42x^3+179x^2+56x-169=0,$$

cu soluția pozitivă $x=1$.

$$\min C=2m\sqrt{4+1}+m\sqrt{9+36}=2m\sqrt{5}+3m\sqrt{5}=5m\sqrt{5}.$$

Observație. Dacă conducta ar fi instalată pe drumul direct ANB, lungimea ei ar fi fost mai mică, deoarece $AB<AM+MB$, dar costul ei ar fi fost mai mare. În acest caz, costul direct ar fi:

$$C_{\text{direct}}=2m\cdot\frac{2}{5}\cdot\sqrt{74}+m\cdot\frac{3}{5}\sqrt{74}=\frac{7m}{5}\sqrt{74},$$

și reprezintă o creștere de 7,7% față de costul minim.

5. De-a lungul unui traseu de cale ferată se află două șantiere de construcții, A și B $(AB=a)$. Un al treilea șantier C se află la distanța c de linia ferată $(CC'=c)$, iar distanța de la șantierul A la proiecția C' pe direcția AB este b $(AC'=b)$.

De-a lungul căii trebuie instalată o magazie de materiale care va alimenta cele 3 șantiere A, B, C, (fig. 109).

Să se determine poziția de amplasare a acestei magazii, știind că numărul mediu zilnic de transporturi efectuate de la magazie la cele 3 șantiere este diferit, iar suma distanțelor efectuate pentru transporturile zilnice trebuie să fie minimă.

Soluție. Folosind notațiile, N_a, N_b, N_c, numărul mediu de transporturi zilnice, $AM=x$, $MC=y$, funcția al cărei minim se caută va fi:

$$L(x)=x\cdot N_a+(a-x)N_b+yN_c=x(N_a-N_b)+aN_b+yN_c.$$

[18] Am aplicat teorema lui Pitagora în $\Delta AA'M$ și $\Delta MM'B$: $AM^2=AA'^2+A'M^2=a^2+x^2$; $MB^2=MM'^2+M'B^2=b^2+(c-x)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum aN_b este o constantă, iar y se obține din $\triangle MCC'$ folosind teorema lui Pitagora, funcția al cărei minim se caută va fi:

$$F(x)=x(N_a-N_b)+N_c\sqrt{(b-x)^2+c^2}.$$

Derivata acestei funcții se anulează pentru:

$$x=b\pm\frac{c(N_a-N_b)}{\sqrt{N_c^2-(N_a-N_b)^2}},$$

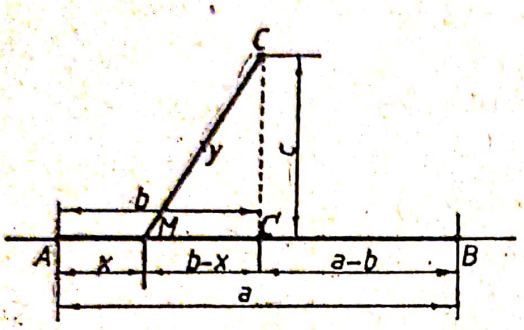


Fig. 109

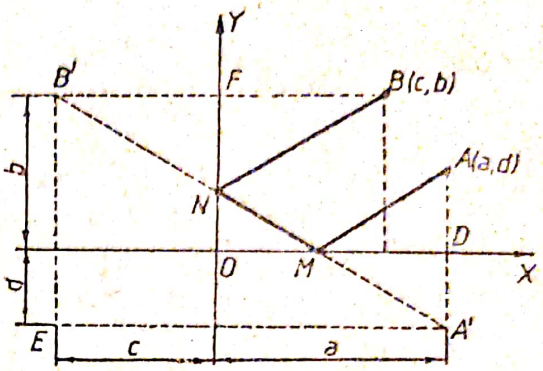


Fig. 110

și se va lua semnul minus în fața radicalului, dacă $N_a>N_b$ și semnul plus dacă $N_a<N_b$. Dacă $N_a=N_b$, $x=b$ și deci punctul M coincide cu piciorul perpendicularei din C pe AB; $L_{min}=aN_a+cN_c$.

Exemplu. Pentru $a=600$ m, $b=400$ m, $c=240$ m, $N_a=10$, $N_b=6$, $N_c=5$,

$$x=400-\frac{240(10-6)}{\sqrt{25-16}}=80;\quad y=\sqrt{(400-80)^2+240^2}\approx 400;$$

$$L_{min}=80\cdot(10-6)+600\cdot 6+400\cdot 5=5920 \text{ m/zi}.$$

6. Două fabrici A și B sînt situate între două șosele perpendiculare OX și OY. Aceste fabrici trebuie unite printr-un drum care să facă și legătura cu cele două șosele. Să se determine poziția punctelor M și N situate pe OX, respectiv OY, astfel încît costul acestui drum să fie minim; poziția celor două fabrici față de sistemul XOY fiind cunoscută $A(a, d)$; $B(c, b)$.

Soluție. Folosind notațiile din figura 110, se constată că:

A' este simetricul lui A față de axa OX;

B' este simetricul lui B față de axa OY.

$$AM=MA';\quad BN=NB';\quad A'E=a+c;\quad B'E=b+d;$$

$$\min(BN+NM+MA)=\min(B'N+NM+MA')=A'B'.$$

Din triunghiul dreptunghic $A'B'E$, teorema lui Pitagora ne dă:

$$L_{min}=AM+MN+NB=A'B'=\sqrt{A'E^2+B'E^2},$$

$$L_{min}=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

Din asemănarea triunghiurilor: $\triangle B'FN\sim\triangle MON\sim\triangle A'MD$, se obține:

$$OM=\frac{ab-cd}{b+d},\quad ON=\frac{ab-cd}{a+c}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Dacă $a=5$, $d=2$, $b=4$, $c=3$, găsim:

$$L_{min}=\sqrt{8^2+6^2}=10;\quad OM=\frac{20-6}{6}=\frac{7}{3};\quad ON=\frac{20-6}{8}=\frac{7}{4}.$$

7. De la Pitagora și Euclid, la Torricelli și Bonaparte.

Napoleon găsea cu o ușurință prodigioasă soluțiile unor probleme de geometrie foarte complicate. Însuși Monge a fost încîntat de rezultatele obținute.

Geometria îl pasiona în mod deosebit, deoarece era un instrument foarte util în unele probleme de balistică, disciplină în care excela, atît în teorie cît și în practică.

Numele lui Napoleon a rămas legat în geometrie de triunghiurile ce-i poartă numele: „triunghiul exterior și interior al lui Napoleon", deduse dintr-o teoremă a lui Torricelli[19], folosind teorema lui Pitagora generalizată.

În anul 1962, matematicianul sovietic V. V. Lebedev publică interesanta lucrare[20], *Unele proprietăți ale triunghiurilor lui Napoleon*, care pune în evidență o serie de relații între ariile lor, precum și unele proprietăți remarcabile ale acestora.

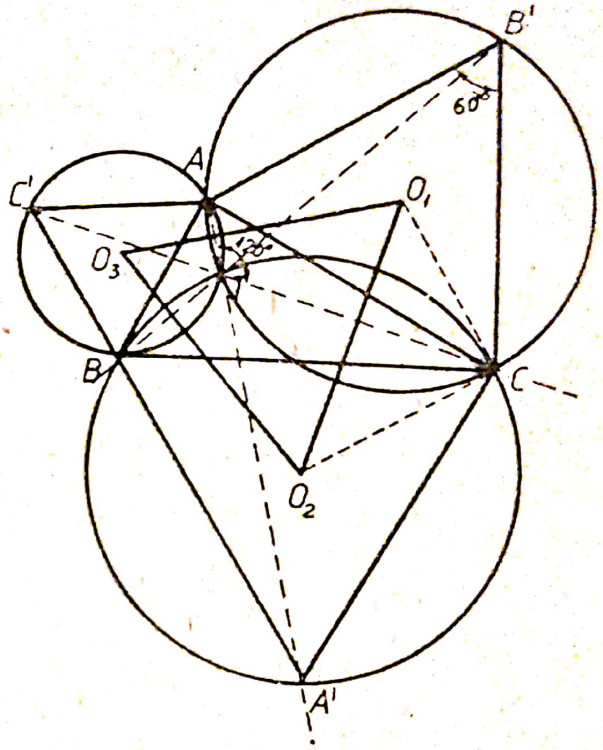


Fig. 111

Triunghiul exterior al lui Napoleon

La laturile unui triunghi oarecare ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABC', BCA', CAB' (fig. 111).

$$AB=BC'=C'A=c;\quad BC=CA'=A'B'=a;\quad CA=AB'=B'C=b.$$

Teorema lui Torricelli

a. Cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale sînt concurente într-un punct T.

b. Laturile triunghiului ABC se văd din punctul T sub unghiuri egale:

$$\widehat{ATB}=\widehat{BTC}=\widehat{CTA}=120°.$$

c. Dreptele AA', BB', CC' sînt concurente în punctul T.

d. Dacă T se află în interiorul triunghiului, suma distanțelor lui la vîrfurile triunghiului: $TA+TB+TC$ este minimă.

[19] Evanghelista Torricelli (1608—1647). Elevul preferat al lui Galileo-Galilei (1564—1642).

[20] Lebedev, V. V. Nekotoriie svoistvatreugolnikov Năpoleona. „Matematica v școle", nr. 6, 1962, pp. 64—67.

Scanned with OKEN Scanner

e. Centrele O_1, O_2, O_3 ale cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ABC', PCA', CAB' sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Cercurile cu centrele O_1, O_2, O_3, poartă numele de cercurile lui Torricelli, punctul T situat în interiorul trunghiului ABC, care se bucură de proprietatea de minim se numește punctul lui Torricelli, iar triunghiul echilateral $O_1O_2O_3$ poartă numele de *triunghiul exterior al lui Napoleon.*

Demonstrație[21]

a-b. Dacă cercurile O_1 și O_3 se taie în punctul T, atunci $\widehat{ATC}+\widehat{AB'C}=180°$; $\widehat{ATC}=180°-\widehat{AB'C}=180°-120°$. De asemenea $\widehat{ATB}+\widehat{BC'A}=180°$; $\widehat{ATB}=180°-60°=120°$. Dar $\widehat{ATC}+\widehat{ATB}+\widehat{BTC}=360°$. Rezultă $\widehat{BTC}=120°$.

Cum $\widehat{BTC}+\widehat{BA'C}=120°+60°=180°$, patrulaterul $BTCA'$ este inscriptibil. Din T, laturile triunghiului ABC se văd sub unghiurile egale de 120°; $\widehat{ATB}=\widehat{BTC}=\widehat{CTA}=120°$. Punctele a și b sînt astfel demonstrate.

c. Linia centrelor $O_1O_3 \perp AT$ și analog $O_1O_2 \perp CD$; $O_2O_3 \perp BT$. Avem $\widehat{ATB}=120°$; $\widehat{BTA'}=\widehat{BCA'}=60°$; $\widehat{ATB}+\widehat{BTA}=120°+60°=180°$ și deci punctele A, T, A' sînt coliniare. Analog B, T, B' și C, T, C' sînt coliniare, deci AA', BB', CC' sînt concurente în punctul T.

Ne propunem să arătăm că $AA'=BB'=CC'$.

Aplicăm teorema cosinusului în $\triangle AA'C$:

$$AA'^2=AC^2+A'C^2-2AC\cdot A'C\cos(\widehat{C}+60°)=$$

$$=b^2+a^2-2\cdot ab\,(\cos\widehat{C}\cos 60°-\sin\widehat{C}\cdot\sin 60°)=$$

$$=b^2+a^2-ab\cos\widehat{C}+ab\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\widehat{C}. \qquad (1)$$

Cum $ab\cos\widehat{C}=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$; $ab\sin\widehat{C}=2S$, relația (1) se scrie:

$$AA'^2=a^2+b^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)+2S\cdot\sqrt{3}=$$

$$=\left(\frac{(a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$AA'=BB'=CC'=\left(\frac{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2};\ S=\text{aria }\triangle ABC.$$

d. *Soluție optică.* Se presupune $TA=R=$constant. În acest caz, punctul T se va afla pe un cerc cu centrul în A și raza R.

Se cere poziția punctului T situat pe cercul A, astfel încît suma dintre $BT+TC$ să fie minimă (fig. 112).

Dacă se presupune în B o sursă de lumină, o rază care pleacă din B se va reflecta în C, astfel încît $\widehat{BTN}=\widehat{NTC}$ (unghiul de incidență este egal cu

[21] Viorel Gh. Vodă. *Triunghiul — ringul cu trei colțuri*, p. 108–123, Editura Albatros — București, 1979.

unghiul de reflexie). În mod analog, considerînd pe rînd pe BT, apoi pe CT constante, ar rezulta că cele 3 drepte ce unesc pe T cu A, B, C împart planul în 6 unghiuri, al căror vîrf comun este T. Examinînd perechile de unghiuri opuse la vîrf din figura 113, se constată că fiecare din ele are cîte 60°

$$(\alpha=\beta=\gamma=60°;\quad 2\alpha=2\beta=2\gamma=120°).$$

Rezultă că min $(TA+TB+TC)$ se obține dacă $\widehat{ATB}=\widehat{BTC}=\widehat{CTA}=120°$.

Suma distanțelor de la punctul T la vîrfurile $\triangle ABC$ este minimă, dacă laturile triunghiului se văd sub unghiuri de 120°. (*c.c.t.d*).

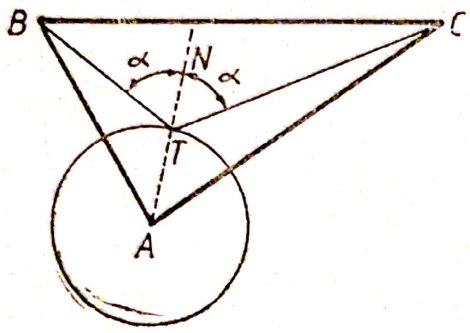


Fig. 112

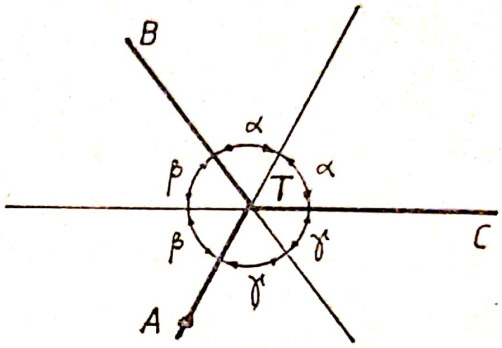


Fig. 113

Observații

— Dacă $\widehat{A}<120°$, punctul lui Torricelli (T) este interior triunghiului ABC.

— Dacă $\widehat{A}=120°$, punctul lui Torricelli (T) coincide cu vîrful A.

— Dacă $\widehat{A}<120°$, punctul lui Torricelli (T) este exterior triunghiului ABC.

În cazul în care $\widehat{A}\leqslant 120°$, punctul lui Torricelli se bucură de proprietatea de minim: suma $TA+TB+TC$ este minimă.

Pentru calculul acestei sume, să observăm că, patrulaterul $TBA'C$ fiind inscriptibil $(\widehat{BTC}+\widehat{BA'C}=120°=60+180°)$, putem aplica teorema lui Ptolemeu: *într-un patrulater inscriptibil, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse*:

$$BC\cdot TA'=BA'\cdot TC+BT\cdot CA';\qquad (2)$$

cum $BC=BA'=CA'=a$ (prin ipoteză $\triangle BCA'$ este echilateral), relația (2) devine:

$$BT+TC=TA',$$

sau $BT+TC+TA=TA'+TA=AA'$. Rezultă:

$$TA+TB+TC=AA'=BB'=CC'=\left(\frac{(a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2}.$$

e. Din $\triangle O_1O_2C$; avem: $O_1C=\frac{AC}{\sqrt{3}}=\frac{b}{\sqrt{3}}$; $O_2C=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$;

fiind razele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale $AB'C$ și $BA'C$, iar $\widehat{O_1CO_2}=\widehat{O_1CA}+\widehat{C}+\widehat{BCO_2}=30°+\widehat{C}+30°=60°+\widehat{C}$.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema cosinusului aplicată în $\triangle O_1O_2C$ ne dă:

$$O_1O_2^2=O_1C^2+O_2C^2-2O_1C\cdot O_2C\cdot\cos(60^\circ+\widehat{C})=\frac{b^2}{3}+\frac{a^2}{3}-$$

$$-2\frac{ab}{3}\left(\frac{1}{2}\cos\widehat{C}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\widehat{C}\right).$$

$$O_1O_2^2=\frac{a^2+b^2}{3}-\frac{ab}{3}\cos\widehat{C}+\frac{ab\sqrt{3}}{3}\sin\widehat{C}. \qquad (3)$$

Cum $ab\cos\widehat{C}=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$ și $ab\sin\widehat{C}=2S$, relația (3) devine:

$$O_1O_2^2=\frac{a^2+b^2}{3}-\frac{a^2+b^2-c^2}{6}+\frac{2S\sqrt{3}}{3}=\frac{a^2+b^2+c^2+4S\cdot\sqrt{3}}{6}.$$

$$O_1O_2=O_2O_3=O_3O_1=\left(\frac{a^2+b^2+c^2+4S\cdot\sqrt{3}}{6}\right)^{1/2};\ S=\text{aria }\triangle ABC.$$

Cum triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral, aria lui s va fi:

$$s=\frac{\sqrt{3}}{4}O_1O_2^2=\frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}).$$

Calculul raportului $AA':O_1O_2$.

Dacă notăm $E=a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}$, atunci:

$$\frac{AA'}{O_1O_2}=\sqrt{\frac{E}{2}}:\sqrt{\frac{E}{6}}=\sqrt{3}\to AA'=O_1O_2\sqrt{3}\ \to L_3=R\sqrt{3}.$$

Segmentele $AA'=BB'=CC'$, sînt egale cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul de rază egală cu latura triunghiului exterior al lui Napoleon ($R=O_1O_2$).

*
* *

Triunghiul interior al lui Napoleon.

Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în interior triunghiurile echilaterale ABC', BCA', CAB' (fig. 114);

$$AB=BC'=C'A=c;\ BC=CA'=A'B=a;\ CA=AB'=B'C=b.$$

Centrele O_1, O_2, O_3 ale cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ACB', BCA', ABC' sînt vîrfurile unui triunghi echilateral, numit *triunghiul interior al lui Napoleon*.

În mod analog, ca și în cazul triunghiului exterior al lui Napoleon se poate arăta că:

— Dreptele AA', BB', CC' sînt concurente în punctul T', numit punctul exterior al lui Torricelli.

— Din acest punct, laturile triunghiului ABC se văd sub unghiurile:

$$\widehat{AT'B}=60°;\ \widehat{BT'C}=60°;\ \widehat{AT'C}=120°.$$

Din $\triangle AA'B$, teorema cosinusului ne permite să scriem.

$$AA'^2=AB^2+A'B^2-2AB\cdot A'B\cos(\widehat{A'BC}-\widehat{ABC})=c^2+a^2-2ac\cos(60°-$$

$$-\hat{B})=a^2+c^2-2ac(\cos 60°\cos\hat{B}+\sin 60°\sin\hat{B})=a^2+c^2-2ac\left(\frac{1}{2}\cos\hat{B}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\hat{B}\right)=a^2+c^2-ac\cos\hat{B}-$$

$$-ac\sqrt{3}\sin\hat{B}=a^2+c^2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2}-$$

$$-2S\cdot\sqrt{3}=\frac{a^2+c^2+b^2-4S\cdot\sqrt{3}}{2}.$$

$$AA'=BB'=CC'=$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2-4S\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2}$$

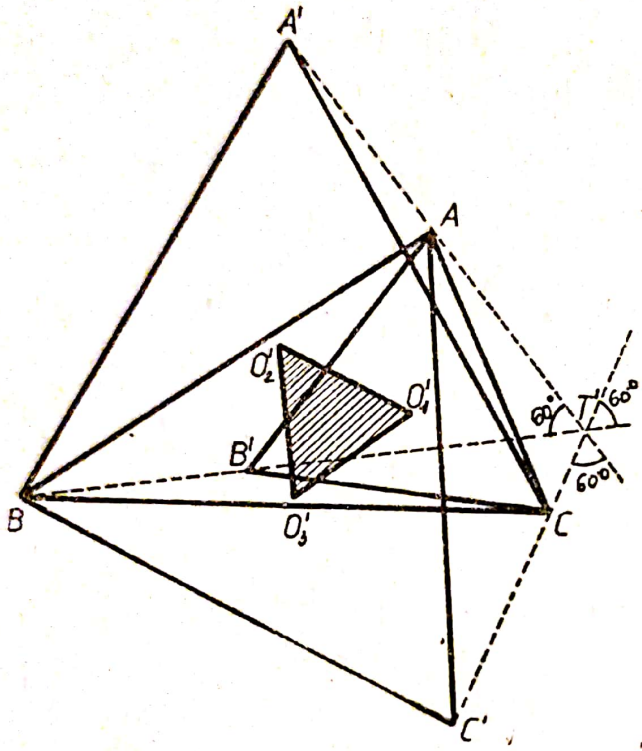


Fig. 114

În mod analog se obține:

$$O_1'O_2'=O_2'O_3'=O_3'O_1'=$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2-4S\cdot\sqrt{3}}{6}\right)^{1/2}.$$

Triunghiul $O_1'O_2'O_3'$ fiind echilateral, aria lui s' va fi:

$$s'=\frac{\sqrt{3}}{4}O_1'O_2'^2=\frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2-4S\sqrt{3});\ S=\text{aria }\triangle ABC.$$

Patrulaterul $A'T'CB$ este inscriptibil, deoarece $\widehat{A'T'C}+\widehat{CBA'}=120°+$ $+60°=180$. Teorema lui Ptolemeu ne permite să scriem:

$$A'C\cdot BT'=A'B\cdot T'C+BC\cdot A'T'.$$

Dar $\triangle A'BC$ fiind echilateral:

$$A'C=A'B=BC=a,$$

după simplificare, relația de mai sus se scrie:

$$T'B=T'C+T'A'.$$

Cum $T'A'=T'A+AA'$, relația obținută devine:

$$T'B-T'C-T'A=AA'=BB'=CC'.$$

Relație care se mai poate scrie și sub forma:

$$TA'+T'C'-T'B=2BB'.$$

Scanned with OKEN Scanner

Între ariile s și s' ale celor două triunghiuri ale lui Napoleon avem relațiile:

$$s+s'=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2);\ s-s'=S.$$

$$s\cdot s'=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2-48\,S^2}{192};\ \frac{s'}{s}=\frac{a^2+b^2+c^2-4S\cdot\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}}.$$

În particular, dacă $\triangle ABC$ este echilateral: $a=b=c$; $s=S$; $s'=0$.
În general, aria (s) a triunghiului exterior este egală cu aria (s') a triunghiului interior mărită cu aria S a triunghiului dat: $s=s'+S$.

Calculul raportului $AA':O_1'O_2'$.

Dacă notăm $E=a^2+b^2+c^2-4S\cdot\sqrt{3}$, atunci:

$$\frac{AA'}{O_1'O_2'}=\sqrt{\frac{E}{2}}:\sqrt{\frac{E}{6}}=\sqrt{3}\to AA'=O_1'O_2'\cdot\sqrt{3}.$$

Segmentele $AA'=BB'=CC'$, sînt egale cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul de rază egală cu latura triunghiului interior al lui Napoleon $(R=O_1'O_2')$.

*

Dacă triunghiul dat ABC este degenerat $S=0$ și raportul $s':s=1$, iar dacă $\triangle ABC$ este echilateral $s':s=0$. Dacă notăm:

$$s':s=(O_1'O_2')^2:(O_1O_2)^2=k;\ \text{rezultă}\ 0\leqslant k\leqslant 1\ldots$$

*

Am expus cîteva probleme teoretice și practice ale căror soluții se sprijină pe teorema lui Pitagora, sau generalizarea acestei teoreme aplicată unui triunghi oarecare. Numărul acestor aplicații este enorm de mare. Noi am ales cîteva, din domenii cît mai variate.

Trebuie să recunoaștem, că în întreaga literatură matematică nu se cunoaște o altă teoremă mai simplă și mai utilă.

*

Importanța acestei teoreme și cunoașterea ei de către masele largi ale oamenilor de pretutindeni și din toate timpurile, a făcut ca enunțul ei să fie transpus și în versuri. Dăm versiunea în limba română, franceză, germană și greacă:

Ipotenuza la pătrat,
De vei dori oricînd a ridica,
Peste catete la pătrat,
A căror sumă să o faci, vei da.

Scanned with OKEN Scanner

Le carée de l'hypoténuse
Est egal si je n'abuse,
À la somme des carrés
Des deux autres côtés.

Die Hypothenuse zum quadrat
Willst erheben
Die Summe der Katheten quadrate
Wird's ergeben.

ΤΟ ΤΕΤΡΑΓ̲ΟΝΟ ΤΗΣ ΥΠΟΤΕΙΝΑΣΗΣ
ΟΡ ΘΟΔ̲ΟΝΙΟΥ ΤΡΙΓΟΝΟΥ, ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ
ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩ̲Ν ΤΕΤΡΑΓ̲Ω̲Ν
ΤΩ̲Ν ΔΥΟ ΑΛΛΩ̲Ν ΟΛΑΥΡΩ̲Ν

Scanned with OKEN Scanner

Încheiere

Cele cinci candele din Capela Pitagora

Nu departe, la nord de antica *Crotona*, unde profesa Pitagora, (cunoscută astăzi sub numele de Cortona), pe drumul ce duce spre Metapont (astăzi Taranto), unde legenda spune că ar fi murit Pitagora, există o regiune mică cunoscută sub numele ei latin de *Terra Imaginationis*.

În această regiune, nu departe de autostrada care şerpuieşte de-a lungul coastei calabreze, se află micul cătun *San Mathesis*. Puţin la stînga, în afara satului, se găseşte o capelă gotică cunoscută sub numele de *Capela Pitagora*. În această capelă, pe podea, în faţa altarului, se află o lespede de marmură albă ştearsă de veacuri şi de miile de pelerini ce au trecut pe aici.

Din inscripţia de pe ea numai cîteva litere mai pot fi deslușite:

HI...C. T.. OS...T...G...S...S

care arată cu siguranţă că în timpurile de demult, legenda spunea că:

„AICI SE ODIHNESC OASELE LUI PITAGORA DIN SAMOS".

Singurul locuitor al capelei este un preot cu o sutană lungă, care ţine aprinse, zi şi noapte, cinci candele aşezate în cinci firide în jurul altarului, ca o dovadă că *Pentagrama* (pentagonul stelat) era semnul de unire al pitagoreicilor. Acest preot povesteşte oricărui călător care vizitează capela (al cărei constructor are numele săpat pe o piatră de marmură roşie frumos ornamentată) — semnificaţia acestor cinci candele.

PRIMA din aceste candele este *Lampas utilitatis*. Ea ne arată că nu putem împărtăşi matematica marii mulţimi a poporului, decît dacă ne oprim mai întîi asupra utilităţii ei şi ne putem imagina uşor ce s-ar întîmpla omenirii, dacă ar înceta să existe orice urmă de ştiinţă matematică.

Astăzi sîntem cu toţii de acord că matematica — ştiinţa în genere — „este o piesă esenţială în cunoaşterea naturii". Dar matematica este utilă nu numai pentru că ne permite să cunoaştem tainele cele mai adînci ale naturii, ci şi pentru că ea ne învaţă să construim maşini de tot felul, din ce în ce mai perfecţionate, care vor prelua în viitor într-o şi mai mare măsură munca fizică şi o parte importantă din munca intelectuală a omului.

A DOUA candelă este *Lampas decoris*, candela frumuseţii.

Scanned with OKEN Scanner

Adevăratul succes în predarea matematicii este posibil, numai dacă știm că această disciplină este tot atît de frumoasă pe cît de utilă.

Existența elementului frumos în matematică este pusă în evidență de relațiile de simetrie ale unor formule, ale figurilor și corpurilor geometrice, ale curbelor plane și din spațiu, sau introduse în metodele și principiile folosite pentru demonstrarea adevărurilor. În matematică mai există însă un element frumos de o natură particulară caracteristic acestei discipline, este *frumosul logic*.

El nu depinde de sensibilitatea individului și are un caracter de universalitate pe care numai adevărul îl poate conferi. Ca exemplu voi cita cele 5 axiome scrise de nemuritorul Euclid cu 300 ani î.e.n. în celebrele sale *Elemente*.

Cele egale cu aceleași sînt egale și între ele.
Dacă la egale se adună egale, se obțin egale.
Dacă din egale se scad egale, cele rămase sînt egale.
Acelea ce coincid una cu alta sînt egale între ele.
Întregul este mai mare decît partea.

Singură, utilitatea imediată sau mai tîrzie fără un sentiment al frumosului devine muncă silnică lipsită de speranță, care duce la stagnare.

A TREIA este *Lampas Imaginationis;* un nume care pare întotdeauna potrivit în legătură cu o capelă medievală în care ard candele sfinte, căci ce-ar fi matematica fără imaginația devotaților ei, uriașilor și învățăceilor ei.

Niciodată nu s-a făcut o descoperire fără impulsul imaginației, care a deschis căi luminoase pe drumurile întunecate ale pădurilor, pentru ca logica pură să poată intra.

A PATRA candelă este *Lampas poesis*, candela poeziei.

Ea ne arată că acei care n-au simțit poezia matematicii, ar fi mai bine să înceteze a mai profesa această știință, căci altfel eforturile lor sînt zadarnice.

Matematica și poezia sînt expresii ale aceleiași puteri de imaginație, cu deosebirea că în primul caz ea se adresează mai mult minții, iar în al doilea mai mult inimii. Weierstrass, într-o scrisoare adresată Sofiei Kovalevski[22] mărturisea: „La mulți oameni înțelepți se simte o lipsă, ei nu posedă destulă fantezie, și este sigur că cineva care nu e puțin poet, nu poate fi un matematician strălucit". Sofia Kovalevski la rîndul ei era convinsă că "Matematica cere tot atîta imaginație ca și poezia".

Vorbind despre geometrie și poezie, Ion Barbu mărturisea că: „Oricît ar părea de contradictorii acești doi termeni la prima vedere, există undeva, în domeniul înalt al geometriei, un loc luminos unde se întîlnește cu poezia. Ca și în geometrie înțeleg prin poezie o anumită simbolică pentru reprezentarea formelor posibile de existență...". „Matematicele pun în joc puteri sufletești, nu mult diferite de cele solicitate de poezie și artă".

A CINCEA este *Lampas misteri*. Ea descoperă lumii unul din marile farmece ale științei. Cercetătorii în domeniul matematicii sînt învăluiți de nori, dar succesul împrăștie acești nori pe o cale scurtă și o descoperire este realizată, apoi un altul face o descoperire mai mare și-i împrăștie și mai mult. Și astfel, la rare intervale de timp apare un Descartes, un Newton, apoi un

[22] Matematiciană și scriitoare rusă (1850—1891). Premiată de Academia de științe din Paris.

Scanned with OKEN Scanner

Gauss, și-i împrăștie pe o cale lungă, lungă,..., apoi din nou negura înconjurătoare a misterului dăinuiește peste alte perioade de timp.

Această risipire a norilor este o mare experiență, dar oricum am proceda, negura ne învăluie din nou, pînă cînd apare un alt titan al gîndirii matematice și iarăși norii încep să se risipească. Astfel de situații rare în istoria matematicii determină epoci de mare însemnătate în evoluția științifică a omenirii.

Desigur că atît capela cea mică de la marginea mării și cuvintele preotului sînt imaginare — crud de imaginare, însă cele cinci candele pot deveni realități pentru toți cei ce iubesc matematica, doresc să viseze la frumusețile și posibilitățile ei aplicative, doresc să deschidă larg porțile, pentru a trece din *țara imaginațiilor* în *țara realităților*.

Cu ocazia sărbătoririi a 2 500 de ani ce ne despart de viața lui Pitagora, ce a avut loc în anul 1976 la Atena și în Insula Samos, unde s-a născut și și-a petrecut copilăria, ca un pios omagiu adus excepționalei sale personalități, vom reda cîteva versuri ce pun în evidență cele două concepte fundamentale pe care se sprijină întregul edificiu al școlii pitagoreice: *numărul* și *demonstrația*.

PYTAGORA (Ion Barbu[23])

În calmul multor zile de drumuri lungi pe mare
Spre sînul adîncimei fluide am privit;
Iar ochiul meu lăuntric e încă năpădit
De-a umbrei și-a culorii bogată-amalgamare:

Cînd repezi, cînd sticloase, și umede și rare,
În orbul mării limpezi — tezaur negrăit —
Răsfrîngeri fără *număr*, pe rînd au oglindit
Mulțipla aparență și vecinica schimbare.

Dar mai apoi *Crotona*, cu zidul dorian
M-au despărțit de-a pururi de glaucul noian...
O, Iön... Duhul Spartei încruntă strîmta zare;

Și sus, prin golul nopții, mai trist și mai sever —
Cetatea siderală în stricta-i descărnare
Își dezvelește-n *număr* vertebra ei de fier...

[23] Poet și matematician român (1895—1961).

MUNDUM REGUNT NUMERI (Ion Grigore[24])

Originar din *Samos*, un om, un muritor,
Enunţă în *Crotona* perceptul uimitor,
Înscris pe veci în templul *Pitagorician*
Că *numărul* e lege, e unic suveran.

În şcoala pitagoreică *raţionamentul* şi *demonstraţia* au înlocuit pentru totdeauna metodele empirice bazate pe experienţă.

Nu ce spun zeii, regii e adevăr curat,
Ci doar ceea ce poate să fie *demonstrat*,
Cînd scoatem adevărul, ce nu-i un simplu joc,
Demagogie, mituri, nu-şi au aicea loc.

Cu-aceste-nvăţăminte, ce stau ca ideal
Valabil peste secoli, rămîi universal.
Sporita-i patrimoniul întregii omeniri,
Asigurîndu-ţi nimbul supremei *Nemuriri*

*

În încheiere vom reda cîteva fragmente din conferinţa ţinută la Atena, de acad. O. Onicescu, cu ocazia comemorării a 2500 de ani de la moartea lui Pitagora.

„Încercînd să înţeleg opera de matematician a lui Pitagora, n-am putut să mă sustrag actracţiei irezistibile a acestui înţelept a cărui viaţă a fost o sforţare continuă de perfecţiune de sine însuşi, completată cu grija permanentă a ajutorării celorlalţi. Şi mă simt obligat să vă comunic înainte de a analiza opera sa matematică şi ecourile sale, impresia puternică resimţită ce mi-a dominat acest studiu.

Se spune despre el — după Diogene Laertiu — că prezenţa îi era gravă şi că discipolii îl considerau ca Apollo Hiperboreanul, venit din Nordul depărtat. Dacă adăugăm că, după Herodot, unul din discipolii, sau poate sclav al său, a fost Zamolxe, mare preot şi legislator al strămoşilor noştri care au fost popoarele geto-dace şi că elementele cunoscute la noi din doctrina acestuia au multe caractere comune cu cele pitagoreice, se va înţelege mai bine interesul ce-l port existenţei şi gîndirii lui Pitagora şi şcolii lui.

Aristotel însuşi îl considera fiu de zeu, acest zeu fiind, o spune în mai multe rînduri, Apollo. Era aşa de admirat pentru înţelepciunea sa, încît discipolii erau consideraţi ca profeţii cuvîntului Zeului.

[24] Ion Grigore, prof. emerit de matematici, poet şi epigramist (n. 1908).

Scanned with OKEN Scanner

E greu să credem că totul este legendă în această unanimitate de admirație de care nu s-a bucurat nici un alt înțelept, nici înainte nici după Pitagora.

Viața lui a fost exemplară, după părerea celor ce au scris despre el: o viață de sfînt am spune noi azi.

Tot Diogene Laertiu ne povestește că după ce a călătorit în diverse țări străine, în Egipt, în Creta, la caldeeni și la magi, cu recomandarea lui Policrate, regele Samos-ului, unde s-a născut, odată întors acasă, n-a putut suporta tirania și a plecat în Italia stabilindu-se la Crotona.

Acolo a redijat o constituție pentru grecii din Italia și a fost ținut în mare cinste împreună cu toți discipolii săi. Aceștia erau în număr de 300, iar comportarea guvernului lor, deosebit de prețuită, era considerată ca un model.

Reușita excepțională datorită maestrului e o probă categorică a perfecțiunii ce i se atribuia, pe care o citățm cu o încredere instinctivă.

Ea l-a condus nu numai la o doctrină a guvernării oamenilor, dar i-a dat și mijloacele de a reuși în chip fericit să o impună. Spunem aceasta gîndindune la alte două mari personalități ale trecutului depărtat: Solon și Platon. Primul a știut și el să dea o constituție înțeleaptă Atenei și a știut s-o și aplice. Dar nu era în afară de aceasta și maestru al gîndirii filosofice în general.

Platon, filosof prin excelență și o foarte puternică personalitate, era însă un izolat în cetatea de adopțiune în care a încercat să impună o constituție. Chiar cînd a încercat, poate după exemplul lui Pitagora, să fondeze o cetate a lui, alături de Siracusa, el nu a reușit cu tot ajutorul regelui, sau poate din pricina acestui ajutor, dar mai ales pentru că îi lipseau adeziunea umană așa de strălucit atrasă de Pitagora.

J. Burnet pe care-l citez după Anton Dumitriu (Philosophia Mirabilis, Ed. Enciclopedică română 1974) afirmă că Heraclit socotea că Pitagora împinsese cercetarea științifică în toate direcțiile mult mai departe decît toți. Și doar Heraclit nu fusese niciodată prea favorabil teoriilor pitagoreice.

Citez, de asemenea, după A. Dumitriu, elogiul scris de Empedocle din Agrigenti, un tîrziu, dar ilustru discipol al înțeleptului:

„Există la ei un om care depășea știința,
Un om care stăpînea efectiv cel mai mare tezaur de înțelepciune,
Și cînd își încorda toate puterile inteligenței
Contempla fără nici o sforțare toate acțiunile
A zece sau a douăzeci de generații de oameni".

Cunoașterea lui Pitagora era cum spunea Empedocle peste știință, adică peste cunoașterea empirică și științifică a epocii. Ea căuta în adîncimea rațiunii cunoașterii ființei și urmărea capacitatea de a o stăpîni. Dacă n-a putut ajunge la conștiința clară a acestei cunoașteri raționale, pentru care n-au fost suficienți nici cei 2500 de ani ce ne despart de el, *„starea de înțelepciune"* pe care el o poseda, i-au dat forța să scoată din cît cunoștea cele mai fericite rezultate.

Empedocle a redat bine această *„stare de înțelepciune"* în versurile sale asupra calității cunoașterii practicată de pitagoreici.

Mă opresc aici cu considerații asupra înțeleptului, ca să revin la Pitagora ca fondator al științei matematice.

Matematica înainte de Pitagora era formată dintr-o mulțime de cunoștințe, asemenea celorlalte cunoștințe, de fapte de experiență, de constatări empirice.

Scanned with OKEN Scanner

Diferența consta numai în materiile la care această știință se referea: figuri geometrice și numere.

Știința figurilor constituia geometria, iar știința numerelor, aritmetica. Numerele erau *cardinale*, rezultat al unei numărători și *ordinalele*, corespunzînd unei ordini; erau deci numere întregi. Figurile geometrice erau formate din elemente simple, ca puncte, linii, unghiuri, suprafețe, volume. Părțile lor finite din care se constituie figurile sînt în general măsurabile, deci reprezentabile prin numere întregi, în orice operație de măsurare empirică efectivă. Agentul principal al matematicii era deci *numărul întreg*. Egiptenii îi dăduseră din această pricină și semnificație mistică și sub această formă a cunoscut apogeul prin Pitagora, care l-a identificat, cel puțin într-o epocă a activității sale filosofice, cu realul.

Numerele întregi reprezintă proprietăți foarte sugestive de invarianță a unor figuri și a unui mare număr de fenomene fizice. Fenomenele astronomice după care se organizează calendarul, vîrstele vieții în ani și în zile, precum și alte elemente ale vieții noastre se exprimă de asemenea, în numere întregi. Această invarianță la schimbare a dat totdeauna autoritate numărului întreg. Pînă cînd intervenind rațiunea cu puterea sa implacabilă, invarianța numărului întreg cu toate că își are funcțiile cîștigate, a fost recunoscută neputincioasă să reprezinte tot realul și a trebuit să cedeze poziția sa predominantă rațiunii.

A fost curioasă soarta lui Pitagora, ca el să realizeze această înlocuire, această declanșare a puterilor rațiunii cu ocazia cercetării proprietăților unor anume figuri geometrice.

Care erau proprietățile figurilor geometrice pe care Pitagora le-a reținut ca cele mai caracteristice?

Proprietatea fiecărui triunghi, oricare-i este mărimea laturilor, de a avea aceeași valoare pentru suma unghiurilor? Sau poate vreo altă proprietate aparținînd uneia mai calitative, care este adesea folosită în practică, ca de pildă proprietatea de convergență într-un punct a celor trei mediane sau a celor trei bisectoare ale unui triunghi? Figura asupra căreia și-a fixat atenția a fost un obiect foarte special: anume triunghiul dreptunghic, iar proprietatea este aceea care îi poartă azi numele: *pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor celor două catete.*

Proprietatea fusese verificată cu cele mai bune aproximații cerute de-a lungul timpurilor, pe triunghiurile desemnate ca și pe triunghiurile construite pe terenuri ce trebuiau măsurate sau pe pietrele ce trebuiau tăiate pentru construcție.

Cum trebuie să ne închipuim atunci omul care cel dintîi a realizat această trecere de la proprietățile empirice ale unui obiect al științei la proprietățile sale logice care derivă direct de la definiție cu o necesitate universal recunoscută.

Ce importă dacă obiectul era un simplu triunghi, dacă el a constituit o bază indispensabilă, pe care s-a putut clădi *geometria euclidiană* și mai tîrziu *geometriile metrice* ale erei noastre și, mai ales, dacă a constituit modelul primar al operațiilor mintale care au clădit știința noastră?

Am vorbit mai sus despre valoarea pe care Pitagora o atribuie numărului întreg: semnificația unui real care străbate printre datele imediate ale experienței cu stabilitate și invarianță. Cînd se măsura o mărime, se obținea o valoare aproximativă, variabilă cu circumstanțele măsurătorii. Dar cînd

Scanned with OKEN Scanner

se măsura o mulțime finită, se obținea totdeauna același rezultat, indiferent de circumstanțe, ceea ce situa numărul întreg într-o poziție foarte specială.

Fiind dat rezultatul la care a ajuns prin raționament, prin demonstrația teoremei sale, putem să refuzăm a socoti că a obținut aceasta în urma unui efort deliberat? Un efort care căuta în gîndirea logică și nu în număr, care nu mai răspundea problemei, cheia acestui adevăr pur care stătea în dosul rezultatelor așa de coordonate ale experienței?

Lucrul acesta este cu atît mai probabil cu cît demonstrația — această primă demonstrație geometrică înregistrată de știință — nu face să intervină de fel numerele, pentru că nu face să intervină direct expresia numerică a lungimilor și nici a pătratelor considerate. El demonstrează precum se știe, că pătratul care susține unghiul drept al triunghiului este egal în suprafață cu suma pătratelor construite pe laturile ce formează unghiul drept.

El a realizat astfel o adevărată teoremă, prima care nu angaja direct numerele.

După ce a încercat în urma demonstrației teoremei să o exprime printr-o relație între numere ($a^2=b^2+c^2$), Pitagora a descoperit posibilitatea ca aceste numere să nu fie totdeauna întregi. El a demonstrat deci *iraționalitatea*, care era în gîndirea epocii o nonexistență a unui număr care să reprezinte ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel, măsurată cu lungimea laturii considerată ca unitate de măsură.

Pitagora însuși a scos din această constatare concluzia iraționalității lungimilor în general.

Situația paradoxală pe care o aducea cu sine teorema lui Pitagora a cerut o adîncă reexaminare a situației care se crease în sînul matematicii considerată ca știință a obiectelor geometrice. Dacă, de pildă, cele două catete sînt de 3, respectiv 4 unități, pătratul construit pe ipotenuză are suprafața egală cu 25 de unități de suprafață. Dar dacă catetele sînt egale cu unitatea, suprafața pătratului construit pe ipotenuză nu mai poate fi reprezentată prin pătratul laturii, deoarece nu există un număr întreg care ridicat la pătrat să ne dea 2.

Și atunci, neputînd fi reprezentată printr-un număr, nu era oare lipsită de sens această ipotenuză? Așa gîndeau desigur contemporanii lui Pitagora. Urmașii s-au silit să înfrîngă această situație care punea în conflict realitatea cu rațiunea.

În așteptarea lui Eudoxos care se va apropia de soluția problemei printr-un șir infinit de aproximații succesive, Pitagora a sondat abisul infinitului mic ca să caute acolo mărimea — necesar simbolică, ca atare, dar nu lipsită de o anumită valoare logică — care să fie indivizibilă și în același timp element de măsură comună a oricărei mărimi.

Nu-l putem urmări pe această cale în lipsa unor texte precise, dar relevăm cu acest prilej *prezența infinitului* în ideile matematice ale lui Pitagora.

El descoperise și stăpînea o capacitate necunoscută pînă atunci de spiritul uman: raționamentul matematic aplicat la concepte geometrice bine definite și conducînd la propoziții sau acte de cunoaștere tot așa de precise, tot așa de evidente și indiscutabile ca datele la care se referă raționamentul. Concordanța rezultatelor raționamentului cu experiența bine asigurate dinainte, în cazul teoremei lui Pitagora, a făcut ca acest nou instrument de descoperire, de cîștigare de noi cunoștințe în domeniul geometriei, să fie folosit pentru a extinde cîmpul acestei științe.

Ideea secretului cu care Școala lui Pitagora își învăluia activitățile a întunecat mult gîndirea majorității istoricilor.

Scanned with OKEN Scanner

Paul Tannery, spune în legătură cu aceasta: „Am încercat să arăt în *Géométrie grecque* că secretul se aplica descoperirilor matematice nu în urma unor reguli formulate de la început în această privinţă, dar pentru că aceste descoperiri erau destinate unui cerc restrîns, unei elite geloase".

Totuşi, chiar pe la mijlocul secolului al V-lea, un grup de matematicieni, rămaşi fără mijloace în mijlocul persecuţiilor şi al războaielor civile, *„au bătut monedă"* publicînd o geometrie intitulată *Tradiţia după Pitagora* pe care Eudem din Rodos trebuie s-o fi avut şi care a fost cel mai vechi prototip al *Elementelor* lui Euclid.

Secretul asupra descoperirii numărului iraţional $\sqrt{2}$, era vorba de un fapt de o importanţă deosebită.

Conservarea acestui secret poate fi înţeleasă, fiind dată tăria numărului întreg şi a consecinţelor filosofico-mistice pe care le distilau nu numai Pitagora şi şcoala sa în lumea epocii.

După cunoştinţa noastră nu există nici un text precis referitor la principiile demonstraţiilor pe care le-a folosit. Istoricii amestecă laolaltă cunoştinţele geometrice cu celelalte fapte de cunoaştere atunci cînd examinează activităţile Şcolii pitagoreice, în afară de constatarea faptului asupra căruia sînt toţi de acord, că Pitagora a folosit cel dintîi raţionamentul demonstrativ, nici unul nu merge mai departe.

Drumul de formare a conceptelor precise asupra cărora se putea raţiona cu certitudine, merge de la Pitagora prin intermediul creatorilor teoremelor de geometrie, pînă la Socrate şi la Platon şi apoi la Aristotel care a putut în sfîrşit, să formalizeze procedeele raţionamentului logic. S-au aplicat în lumea conceptelor extramatematice procedeele abordate de Pitagora.

Omul trăise sute de mii de ani cu noţiuni şi raţionamente practice aproximative, în continuă perfecţionare, care i-au făcut posibilă existenţa, dar pentru a ajunge la un început de raţionalizare teoretică a gîndirii în general, a gîndirii aplicate la cunoaşterea experienţei şi a celei morale pe urmă, a fost întîi nevoie de construcţia modelului matematic raţionalizat de Pitagora.

Constituţiile create de filosofi sînt şi ele rodul acestui efort de raţionalizare după modelul ştiinţei; de asemenea, şi dreptul roman ca de altfel şi constituţiile lumii actuale sînt pe linia aceluiaşi proces de raţionalizare.

Afirmaţiile de mai sus privesc toate iniţiativele în care domină raţiunea tot aşa de bine în cîmpul ştiinţelor naturii, ca şi cele care privesc pe om într-un proces de continuă perfecţionare, care nu cunoaşte un sfîrşit, pentru că viaţa creează în continuu obiecte noi ce trebuie înglobate în raţionamentele noastre.

Nu a fost un şir întîmplător de circumstanţe care a făcut ca primul model logic valabil să fie realizat pe un *model matematic*. Faptul se datoreşte calităţilor de precizie şi de puritate logică pe care noţiunile matematice le-au realizat înaintea tuturor celorlalte.

Dată fiind importanţa acestui aspect al gîndirii pitagoreice în cîmpul de interese al teoriei cunoaşterii, am lăsat deoparte problema iraţionalelor, care atrag în general atenţia cercetătorilor. Această problemă a fost rezolvată, chiar dacă mult mai tîrziu, prin aceleaşi metode care au animat de la început gîndirea creatoare a lui Pitagora şi care constituie adevăratul său titlul de glorie".

*

Bibliografie

1. George Andonie. *Varia Mathematica.* Editura Albatros, București, 1977.
2. Ion Barbu. *Versuri și proză.* Ed. Minerva, București, 1970.
3. Oscar Becker. *Grösse und Grenze der Mathematischen Denkweise Verlag Karl Alber,* Freiburg-München, 1959.
4. E. T. Bell. *Les grands mathématiciens.* Ed. Payot, Paris, 1950.
5. A. Bökk. *Philolos der Pytagorer Lehren;* Berlin, 1819.
6. C. B. Boyer. *The concepts of the calculs,* 2-ed. N. Y., 1950.
7. J. Brun. *Les Présocratique;* Paris, 1968.
8. F. Cojory. *A history of mathematical notation,* vol. 1—2, Chicago, 1928—30.
9. M. Cantor. *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik,* Bd. 1—2, Aufl. 3 Leipzig, 1907.
10. A. Ed. Chaignet. *Pytagore et la philosophie pytagoricienne,* Paris, 1874.
11. Florica T. Cîmpan. *Din istoria cîtorva numere de seamă.* Ed. Albatros, București, 1973.
12. Florica T. Cîmpan. *Variate aplicații ale matematicii.* Edit. Ion Creangă, București, 1984.
13. Euclid. *Elemente,* vol. I, cărțile 1—6 de geometrie plană. Biblioteca istorică a Gazetei Matematice, București 1939. Traducere după textul grecesc restabilit de către J. L. Heiberg și adnotate de Victor Marin.
14. Anton Dumitru. *Philosophia mirabilis.* Ed. Enciclopedică Română, București, 1974.
15. A. Frajese. *La matematica nel mondo antico,* Milan, 1951.
16. Erik Frank. *Platon und die sogenanten Pytagorer,* Leipzig, 1923.
17. A. Frenkian. *Le monde homerique. Essai de protophilosophie greque.* Paris, 1934.
18. S. Günther. *Geschichte der Mathematik,* Teil 1, Leipzig, 1908.
19. T. Heath. *A history of Greek Mathematics,* vol. 1—2, Oxford, 1921.
20. J. E. Hofmann. *Geschichte der Mathematik,* Bd. 1, Berlin, 1953.
21. Th. Hopfner. *Orient und Grieschische Philosophi,* Leipzig, 1925.
22. I. Ionescu. *Maxime și minime geometrice.* Imprimeria națională, București, 1941.
23. I. Ionescu. Gazeta Matematică, vol. 1, nr. 1, 1895.
24. A. Ilovici. Gazeta Matematică, vol. 1, 1895 și vol. 2, 1896.
25. K. Kolman. *Istoria matematicii în antichitate.* Ed. științifică, București, 1963 (traducere din rusă).
26. Le Lionnais F. *Les grands courants de la pensée mathematique.* Ed. Albert Blanchard. Paris, 1962.
27. Elisa Loomis. *The Pytagorean Proposition.* Ed. Edward Brother; Michigan, 1940.
28. G. Longinescu. Gazeta Matematică, vol. 4, nr. 2, 1899.
29. G. Loria. *Le scienze esatte nell antica Grecia,* Milano, 1914.
30. S. I. Luria. *Arhimede.* Editura științifică, București, 1958 (traducere din rusă).
31. Karl Menninger. *Zwischen Raum und Zahl.* Ulstein Taschenbücher-Verlag Gmb. H, Frankfurt/M. W. Berlin, 1960.
32. P. H. Michel. *De Pythagore à Euclid,* Paris, 1950.
33. N. N. Mihăileanu. *Istoria Matematicii,* vol. 1, Ed. Enciclopedică Română, București, 1974.
34. C. Mihu. *Probleme de optimizare cu aplicații practice.* Ed. Militară, București, 1970.
35. C. Mihu. *Aplicații ale matematicii în practică,* ediția a 3-a, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1977.
36. G. Milhaud. *Le concept de nombre chez les Pythagoriciens,* în Revue de Méta et de Morale; Paris, 1893.
37. Octav Onicescu. *Conștiința răspunderii științifice.* Revista Contemporanul, 9 martie, 1979.

Scanned with OKEN Scanner

38. Octav Onicescu. *Învățați ai lumii*. Editura Albatros, București, 1975.
39. Octav Onicescu. *Pe drumurile vieții*. Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1981.
40. A. Rey. *La science dans l'antiquité* vol. I–III. Paris, 1930–1939.
41. Alphons Rebière. *Mathématique et mathématiciens. Pensées et curiosités*. Librairie Nony-Paris, 1898.
42. Petre Sergescu. *Gîndirea Matematică*. Ed. Ardealul, Cluj, 1928.
43. D. E. Smith. *History of mathematics*, vol. 1–2, Boston-London, 1930.
44. Gabriel Sudan. *Numere pitagoreice în funcție de doi parametri*. Revista Numerus, 1941—pag. 65.
45. P. Tannery. *Pour L'Histoire de la science hellène*, Paris, 1930.
46. P. Tannery. *Mémoires scientifiques*, vol. 3, Paris, 1912–1913.
47. V. Thébault. Gazeta Matematică, vol. 42, nr. 5, 1937.
48. Charles Trigg. Mathematical Quickies, Capright Mc. Graw-Hill, Inc. New'York, 1967.
49. J. Tropfke. Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung. 2 Aufl. Bd. 1–7, Berlin-Leipzig, 1921— 1934; 3 Aufl., Bd. 1–4, 1930–1940.
50. Viorel Vodă. *Triunghiul — Ringul cu 3 colțuri*. Editura Albatros — 1979.
51. B. L. Van der Waerden. Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik, „Mathematische Analen", Bd. 117, 1940.
52. I. Wipper. 46 Beweise des Pythagorischen Lehrsatzes, ediția a 2-a, Berlin, 1911.

Redactor: LUMINIȚA ZORILESCU
Tehnoredactor: ELENA MATEESCU
Coperta de: EUGEN STOIAN

Bun de tipar: 9.06.1986. Format: 16/70×100
Coli de tipar: 7. C.Z. pentru biblioteci mari:
{ 182.2 (Pitagora)
{ 92 (Pitagora)
C.Z. pentru biblioteci mici: 182.2 (Pitagora).

Întreprinderea Poligrafică Brașov
str. Zizinului nr. 110
Comanda 1165
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA